УДК 532.591

С. И. Перегудин

ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ НАД ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ДНОМ

В работе рассматривается непотенциальное движение двух слоев идеальной несжимаемой неоднородной жидкости над твердым, горизонтальным и недеформируемым дном. Представленная математическая модель реализована в линейной аппроксимации. Получено дисперсионное соотношение, характеризующее зависимость циклической частоты от волнового числа и относительной глубины каждого слоя.

Рассмотрим задачу о движении двух слоев идеальной неоднородной жидкости над горизонтальным твердым недеформируемым дном. Все величины, относящиеся к нижнему слою, обозначим индексом 1, к верхнему — индексом 2. Прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ расположим таким образом, чтобы невозмущенная поверхность раздела водных слоев совпадала с плоскостью $z = 0$. Свободная поверхность, поверхность раздела водных слоев и поверхность дна в текущий момент времени t соответственно будут иметь вид $z = H_2 + \eta_2(x, y, t)$, $z = \eta_1(x, y, t)$, $z = -H$, где H_2 и H_0 — толщина верхнего и нижнего слоя в невозмущенном состоянии. Уравнения движения идеальной неоднородной жидкости в момент времени t имеют вид [1, 3–5]

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \bar{v}_j \cdot \nabla \rho_j = 0, \quad \operatorname{div} \bar{v}_j = 0, \quad \rho_j \frac{\mathrm{d}\bar{v}_j}{\mathrm{d}t} = \bar{g}\rho_j - \nabla p_j, \tag{1}$$

где $\bar{v}_j = (v_{jx}, v_{jy}, v_{jz})(x,y,z,t)$, $\rho_j(x, y, z, t)$, $p_j(x,y,z,t)$ — соответственно скорость, плотность и давление в j-м слое жидкости ($j = 1,2$), $\bar{g} = (0,0,-g)$.

На твердом недеформируемом дне $z = -H$ выполняется условие непротекания

$$v_{1z} = 0, \tag{2}$$

на поверхности раздела $z = \eta_1(x, y, z, t)$ выполняются условия: кинематическое

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + v_{jx}\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + v_{jy}\frac{\partial \eta_1}{\partial y} = v_{jz} \tag{3}$$

и динамическое, состоящее в непрерывности давления

$$p_1 = p_2 . \tag{4}$$

На свободной поверхности $z = H_2 + \eta_2(x, y, t)$ также выполняются кинематическое и динамическое условия

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \eta_2}{\partial x} + v_{2y}\frac{\partial \eta_2}{\partial y} = v_{2z}, \quad p_2 = p_\alpha . \tag{5}$$

Уравнения движения (1) с учетом условий на свободной поверхности и поверхности раздела имеют решение

$$\rho_j = \tilde{\rho}_j(z),\ p_j = \tilde{p}_j(z),\ \bar{v}_j = (u_j, v_j, 0)(z),\ \eta_j = 0,\ g\tilde{\rho}_j + \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial z} = 0.$$

Здесь $\tilde{\rho}_j(z), \tilde{p}_j(z), u_j(z), v_j(z)$ — произвольные заданные функции.

Движение жидкости представим в виде [1]

$$\rho_j = \tilde{\rho}_j(z) + \rho'_j, p_j = \tilde{p}_j(z) + p'_j, v_{jx} = u_j(z) + v'_{jx}, v_{jy} = v_j(z) + v'_{jy},$$
$$v_{jz} = v'_{jz}, \eta_j = \eta'_j,$$

штрих характеризует возмущенное движение.

Рассмотрим исходную задачу для возмущенного движения

$$\frac{\partial \rho'_j}{\partial t} + \left(u_j(z) + v'_{jx}\right)\frac{\partial \rho'_j}{\partial x} + \left(v_j(z) + v'_{jy}\right)\frac{\partial \rho'_j}{\partial y} + v'_{jz}\left(\frac{d\tilde{\rho}_j}{dz} + \frac{\partial \rho'_j}{\partial z}\right) = 0,\ \operatorname{div} \bar{v}'_j = 0,$$

$$(\tilde{\rho}_j(z) + \rho'_j)\left[\frac{\partial v'_{jx}}{\partial t} + \left(u_j(z) + v'_{jx}\right)\frac{\partial v'_{jx}}{\partial x} + \left(v_j(z) + v'_{jy}\right)\frac{\partial v'_{jx}}{\partial y} + v'_{jz}\left(\frac{du_j}{dz} + \frac{\partial v'_{jx}}{\partial z}\right)\right] = -\frac{\partial p'_j}{\partial x},$$

$$(\tilde{\rho}_j(z)+\rho'_j)\left[\frac{\partial v'_{jy}}{\partial t}+\left(u_j(z)+v'_{jx}\right)\frac{\partial v'_{jy}}{\partial x}+\left(v_j(z)+v'_{jy}\right)\frac{\partial v'_{jy}}{\partial y}+v'_{jz}\left(\frac{dv_j}{dz}+\frac{\partial v'_{jy}}{\partial z}\right)\right]=-\frac{\partial p'_j}{\partial y},$$

$$(\tilde{\rho}_j(z)+\rho'_j)\left[\frac{\partial v'_{jz}}{\partial t}+\left(u_j(z)+v'_{jx}\right)\frac{\partial v'_{jz}}{\partial x}+\left(v_j(z)+v'_{jy}\right)\frac{\partial v'_{jz}}{\partial y}+v'_{jz}\frac{\partial v'_{jz}}{\partial z}\right]=-g\rho'_j-\frac{\partial p'_j}{\partial z}.$$

Граничные условия (2) — (5) примут вид

$$v'_{1z}=0,\quad z=-H_0,$$

$$\frac{\partial\eta'_1}{\partial t}+\left(u_j(z)+v'_{jx}\right)\frac{\partial\eta'_1}{\partial x}+\left(v_j(z)+v'_{jy}\right)\frac{\partial\eta'_1}{\partial y}=v'_{jz},\ \ g\left(\tilde{\rho}_2-\tilde{\rho}_1\right)\eta'_1+p'_1-p'_2=0,\ z=\eta'_1(x,y,t),$$

$$\frac{\partial\eta'_2}{\partial t}+\left(u_2(z)+v'_{2x}\right)\frac{\partial\eta'_2}{\partial x}+\left(v_2(z)+v'_{2y}\right)\frac{\partial\eta'_2}{\partial y}=v'_{2z},\ \ -g\tilde{\rho}_2\eta'_2+p'_2=0,\ z=H_2+\eta'_2(x,y,t)\ .$$

Рассмотрим соответствующую линейную задачу. Уравнения возмущенного движения

$$\frac{\partial\rho'_j}{\partial t}+u_j(z)\frac{\partial\rho'_j}{\partial x}+v_j(z)\frac{\partial\rho'_j}{\partial y}+\frac{d\tilde{\rho}_j}{dz}v'_{jz}=0,\quad \operatorname{div}\bar{v}'_j=0,$$

$$\tilde{\rho}_j(z)\left[\frac{\partial v'_{jx}}{\partial t}+u_j(z)\frac{\partial v'_{jx}}{\partial x}+v_j(z)\frac{\partial v'_{jx}}{\partial y}+\frac{du_j}{dz}v'_{jz}\right]=-\frac{\partial p'_j}{\partial x},$$

$$\tilde{\rho}_j(z)\left[\frac{\partial v'_{jy}}{\partial t}+u_j(z)\frac{\partial v'_{jy}}{\partial x}+v_j(z)\frac{\partial v'_{jy}}{\partial y}+\frac{dv_j}{dz}v'_{jz}\right]=-\frac{\partial p'_j}{\partial y},$$

$$\tilde{\rho}_j(z)\left[\frac{\partial v'_{jz}}{\partial t}+u_j(z)\frac{\partial v'_{jz}}{\partial x}+v_j(z)\frac{\partial v'_{jz}}{\partial y}\right]=-g\rho'_j-\frac{\partial p'_j}{\partial z}$$

с граничными условиями

$$v_{1z}=0,\quad z=-H_0,$$

$$\frac{\partial\eta'_1}{\partial t}+u_j(z)\frac{\partial\eta'_1}{\partial x}+v_j(z)\frac{\partial\eta'_1}{\partial y}=v'_{jz},\quad g\left(\tilde{\rho}_2-\tilde{\rho}_1\right)\eta'_1+p'_1-p'_2=0,\ z=0,$$

$$\frac{\partial\eta'_2}{\partial t}+u_2(z)\frac{\partial\eta'_2}{\partial x}+v_2(z)\frac{\partial\eta'_2}{\partial y}=v'_{2z},\quad -g\tilde{\rho}_2\eta'_2+p'_2=0,\ z=H_2.$$

Рассмотрим решение в виде бегущей волны с частотой ω и волновым числом $\bar{k}=(k_1,k_2)$:

$$\left\{\rho'_j,p'_j,v'_{jx},v'_{jy},v'_{jz},\ \eta'_1,\eta'_2\right\}=\left\{\left\{R_j,P_j,V_{jx},V_{jy},V_{jz}\right\}(z),A,B\right\}e^{i(k_1x+k_2y-\omega t)}\ .$$

Для определения соответствующих амплитуд имеем уравнения

$$ir_j(z)R_j(z)+\frac{d\tilde{\rho}_j}{dz}V_{jz}(z)=0,\quad i\left(k_1V_{jx}(z)+k_2V_{jy}(z)\right)+V'_{jz}(z)=0,$$

$$\tilde{\rho}_j(z)\left[ir_j(z)V_{jx}(z)+\frac{du_j}{dz}V_{jz}(z)\right]=-ik_1P_j(z),\ \tilde{\rho}_j(z)\left[ir_j(z)V_{jy}(z)+\frac{dv_j}{dz}V_{jz}(z)\right]=-ik_2P_j(z),$$

$$ir_j(z)\tilde{\rho}_j(z)V_{jz}(z) = -gR_j(z) - P_j'(z), \quad r_j(z) = k_1u_j(z) + k_2v_j(z) - \omega \tag{6}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} V_{1z}(z) = 0, \quad z = -H_0, \\ ir_1(z)B = V_{jz}(z), \quad -g\left(\tilde{\rho}_2(z) - \tilde{\rho}_1(z)\right)B + P_1(z) - P_2(z) = 0, \quad z = 0, \\ ir_2(z)C = V_{2z}(z), \; -g\tilde{\rho}_2(z)C + P_2 = 0, \quad z = H_2, \end{gathered} \tag{7}$$

В результате преобразований уравнений (6) с граничными условиями (7) получим краевую задачу для функции $w_j(z) = V_{jz}(z)$:

$$r_j^{\,2}(z)\left(w_j'' - 2\alpha_j(z)w_j'\right) - \left(\left|\bar{k}\right|^2 r_j^{\,2}(z) + r_j(z)\left(r_j''(z) - 2\alpha_j(z)r_j'(z)\right) - \left|\bar{k}\right|^2 N_j^{\,2}(z)\right)w_j = 0,$$

$$w_1(z) = 0, \quad z = -H_0,$$

$$r_2w_1 = r_1w_2, \; \tilde{\rho}_1r_1w_1' - \left[\tilde{\rho}_1r_1' + \frac{g\left|\bar{k}\right|^2}{r_1}\left(\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_2\right)\right]w_1 = \tilde{\rho}_2\left(r_2w_2' - r_2'w_2\right), \; z = 0,$$

$$w_2' = \left(\frac{r_2'}{r_2} + \frac{g\left|\bar{k}\right|^2}{r_2^{\,2}}\right)w_2, \quad z = H_2, \quad N_j^{\,2}(z) = -g\frac{\tilde{\rho}_j'(z)}{\tilde{\rho}_j(z)}, \quad 2\alpha_j = \frac{1}{g}N_j^{\,2}.$$

В результате замены

$$w_j(z) = V_j(z)\exp\left(\int_{-H_0}^{z}\alpha_j(\xi)\,d\xi\right)$$

для функции $V_j(z)$ получим уравнение

$$V_j''(z) + q_j(z)V_j(z) = 0, \; q_j(z) = \alpha_j' - \alpha_j^{\,2} - \left|\bar{k}\right|^2 - \frac{r_j''(z) - 2\alpha_j r_j'(z)}{r_j(z)} + \frac{2g\left|\bar{k}\right|^2}{r^2{}_j(z)}\alpha_j$$

с граничными условиями

$$V_1(z) = 0, \quad z = -H_0, \; V_2'(z) = \beta_6V_2(z), \quad z = H_2,$$

$$V_1(z) = \beta_1V_2(z), \; \beta_2V_1'(z) + \beta_3V_1(z) = \beta_4V_2'(z) + \beta_5V_2(z), \quad z = 0,$$

$$\beta_1 = \frac{r_1(0)}{r_2(0)}, \quad \beta_2 = -\tilde{\rho}_1(0)r_1(0)\alpha_1(0),$$

$$\beta_3 = \tilde{\rho}_1(0)\left(r_1'(0) - r_1(0)\right) + \frac{g\left|\bar{k}\right|^2}{r_1(0)}\left(\tilde{\rho}_1(0) - \tilde{\rho}_2(0)\right), \; \beta_4 = -\tilde{\rho}_2(0)r_2(0)\alpha_2(0),$$

$$\beta_5 = -\tilde{\rho}_2(0)\left(r_2'(0) - r_2(0)\right), \quad \beta_6 = \frac{r_2'(H_2)}{r_2(H_2)} + \frac{g\left|\bar{k}\right|^2}{r_2^{\,2}(H_2)} - \alpha_2(H_2).$$

При $q_j(z) = \mathrm{const}$ имеем $V_j(z) = C_1^j \cos\sqrt{q_j}\, z + C_2^j \sin\sqrt{q_j}\, z$. Удовлетворяя граничным условиям, получим систему уравнений для определения C_1^j, C_2^j

$$\sum_{k=1}^{4} a_{nk} x_k = 0, \quad n = \overline{1,4}, \quad \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2\right)^T, \tag{8}$$

отличные от нуля коэффициенты которой имеют вид

$$a_{11} = \cos\sqrt{q_1} H_0, \quad a_{12} = -\sin\sqrt{q_1} H_0, \quad a_{21} = 1,$$

$$a_{23} = -\beta_1, \; a_{31} = \beta_3, \; a_{32} = \sqrt{q_1}\beta_2, \; a_{33} = -\beta_5, \; a_{34} = -\sqrt{q_2}\beta_4,$$

$$a_{43} = \beta_6 \cos\sqrt{q_2} H_2 + \sqrt{q_2} \sin\sqrt{q_2} H_2, \; a_{44} = \beta_6 \sin\sqrt{q_2} H_2 - \sqrt{q_2} \cos\sqrt{q_2} H_2.$$

Условие существования нетривиального решения системы (8) определяет дисперсионное соотношение для $\omega = \omega(k_1, k_2)$

$$\beta_5 + \sqrt{q_2}\beta_4 \frac{\beta_6 + \sqrt{q_2}\,\mathrm{tg}\sqrt{q_2} H_2}{\sqrt{q_2} - \beta_6\,\mathrm{tg}\sqrt{q_2} H_2} = \beta_1\left[\beta_3 + \sqrt{q_1}\beta_2\,\mathrm{ctg}\sqrt{q_1} H_0\right]$$

Функции $V_j(z)$ примут вид

$$V_1(z) = \widetilde{C}\left(C_1^1 \cos\sqrt{q_1} z + C_2^1 \sin\sqrt{q_1} z\right), \quad V_2(z) = \widetilde{C}\left(C_1^2 \cos\sqrt{q_2} z + \sin\sqrt{q_2} z\right),$$

$$C_1^1 = \frac{\sqrt{q_2}\beta_1\beta_4\,\mathrm{tg}\sqrt{q_1} H_0}{\left(\beta_1\beta_3 - \beta_5\right)\mathrm{tg}\sqrt{q_1} H_0 + \sqrt{q_1}\beta_1\beta_2}, \; C_2^1 = C_1^1\,\mathrm{ctg}\sqrt{q_1} H_0, \; C_1^2 = \frac{C_1^1}{\beta_1},$$

$\widetilde{C}$ — произвольная действительная постоянная. Искомые параметры возмущенного движения имеют вид

$$v'_{jz} = V_j(z) \exp\left(i(k_1 x + k_2 y - \omega t) + \int_{-H_0}^{z} \alpha_j(\xi)\, d\xi\right),$$

$$v'_{jx} = \frac{1}{i\left|\bar{k}\right|^2}\left[\left(k_2 \frac{k_1 v'_j - k_2 u'_j}{r_j(z)} - k_1\alpha_j\right) V_j(z) - k_1 V'_j(z)\right] \exp\left(i(k_1 x + k_2 y - \omega t) + \int_{-H_0}^{z} \alpha_j(\xi)\, d\xi\right),$$

$$v'_{jy} = \frac{1}{i\left|\bar{k}\right|^2}\left[\left(k_1 \frac{k_2 u'_j - k_1 v'_j}{r_j(z)} - k_2\alpha_j\right) V_j(z) - k_2 V'_j(z)\right] \exp\left(i(k_1 x + k_2 y - \omega t) + \int_{-H_0}^{z} \alpha_j(\xi)\, d\xi\right),$$

$$p'_j = \frac{\widetilde{\rho}_j}{i\left|\bar{k}\right|^2}\left[\left(r_j(z)\alpha_j - r'_j(z)\right) V_j(z) + r_j(z) V'_j(z)\right] \exp\left(i(k_1 x + k_2 y - \omega t) + \int_{-H_0}^{z} \alpha_j(\xi)\, d\xi\right),$$

$$\rho'_j = \frac{\widetilde{\rho}_j}{i r_j(z)} V_j(z) \exp\left(i(k_1 x + k_2 y - \omega t) + \int_{-H_0}^{z} \alpha_j(\xi)\, d\xi\right),$$

$$\eta'_1 = \frac{\widetilde{C} C_1^1}{i r_1(0)} \exp\left(i(k_1 x + k_2 y - \omega t) + \int_{-H_0}^{0} \alpha_1(\xi)\, d\xi\right),$$

$$\eta_2' = \frac{\widetilde{C}}{ir_2(H_2)}\left(C_1^2\cos\sqrt{q_2}H_2 + \sin\sqrt{q_2}H_2\right)\exp\left(i(k_1x + k_2y - \omega t) + \int_{-H_0}^{H_2}\alpha_2(\xi)\,d\xi\right).$$

Отношение амплитуд внутренней и поверхностной волны

$$\frac{\eta_1'}{\eta_2'} = \frac{r_2(H_2)}{r_1(0)}\,\frac{\exp\left(\int_{-H_0}^{0}(\alpha_1(\xi)-\alpha_2(\xi))d\xi - \int_{0}^{H_2}\alpha_2(\xi)d\xi\right)}{C_1^2\cos\sqrt{q_2}H_2 + \sin\sqrt{q_2}H_2}.$$

В случае экспоненциального распределения плотности $\widetilde{\rho}_j(z) = \rho_{j0}\exp(-\sigma_j z)$ уравнение для $q_j(z)$ примет вид

$$q_j(z) = -\frac{1}{4}\sigma_j^{\,2} - \left|\bar{k}\right|^2 - \frac{r_j''(z) - \sigma_j\, r_j'(z)}{r_j(z)} + \frac{g\left|\bar{k}\right|^2}{r_j^{\,2}(z)}\sigma_j$$

или

$$r_j''(z) - \sigma_j\, r_j'(z) = -\left(q_j(z) + \frac{1}{4}\sigma_j^{\,2} + \left|\bar{k}\right|^2\right)r_j(z) + \frac{g\left|\bar{k}\right|^2}{r_j(z)}\sigma_j\,.$$

Данное обыкновенное дифференциальное уравнение при помощи подстановки $L_j(r) = \dfrac{r_j(z)}{\sigma_j}$ может быть приведено к уравнению Абеля второго рода [2]

$$L_j'L_j - L_j = -\frac{1}{\sigma_j^{\,2}}\left(q_j + \frac{1}{4}\sigma_j^{\,2} + \left|\bar{k}\right|^2\right)r_j + \frac{g\left|\bar{k}\right|^2}{r_j}\sigma_j,$$

аналитическое решение которого при $q_j = -\dfrac{1}{4}\sigma_j^{\,2} - \left|\bar{k}\right|^2$ выражается параметрически

$$r_j = \left|\bar{k}\right|\sqrt{\frac{g}{2\sigma_j}}\,\frac{\exp(\tau^2)}{\int\exp(\tau^2)d\tau - \bar{C}_j},$$

$$L_j = \left|\bar{k}\right|\sqrt{\frac{g}{2\sigma_j}}\,\frac{\exp(\tau^2) - 2\tau\left(\int\exp(\tau^2)d\tau - \bar{C}_j\right)}{\int\exp(\tau^2)d\tau - \bar{C}_j}.$$

В случае $q_j = q_j(z)$ построим решение $V_{j1}(z), V_{j2}(z)$ с учетом начальных условий [1]

$$V_{j1}(0) = 1, \quad V_{j1}'(0) = 0, \quad V_{j2}(0) = 0, \quad V_{j2}'(0) = 1.$$

Общее решение $V_j(z)$ будет иметь вид

$$V_j(z) = F_j\,V_{j1}(z) + E_j\,V_{j2}(z).$$

Удовлетворяя граничным условиям

$$\sum_{k=1}^{4} b_{nk} y_k = 0, \quad n = \overline{1,4}, \qquad (y_1, y_2, y_3, y_4) = (F_1, E_1, F_2, E_2)^T,$$

$$b_{11} = V_{11}(-H_0), \quad b_{12} = V_{12}(-H_0), \quad b_{21} = 1, \quad b_{23} = -\beta_1,$$

$$b_{31} = \beta_3, \quad b_{32} = \beta_2, \quad b_{33} = -\beta_7,$$

$$b_{34} = -\beta_6, \; b_{43} = V'_{21}(H_2) - \beta_8 V_{21}(H_2), \quad b_{44} = V'_{22}(H_2) - \beta_8 V_{22}(H_2),$$

$$b_{13} = b_{14} = b_{22} = b_{24} = b_{41} = b_{42} = 0,$$

получим уравнение для определения $\omega = \omega(k_1, k_2)$:

$$\beta_5 - \beta_4 \frac{V'_{21}(H_2) - \beta_6 V_{21}(H_2)}{V'_{22}(H_2) - \beta_6 V_{22}(H_2)} = \beta_1 \left[\beta_3 - \beta_2 \frac{V_{11}(-H_0)}{V_{12}(-H_0)} \right],$$

согласно которому можно определить все искомые параметры возмущенного движения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Алешков Ю. З.* Волны на поверхности сыпучих сред, вызванные потоком жидкости // Вестник СПбГУ. 2002. Сер. 1. Вып.4 (№ 25). С. 35–43.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. М., 1995.

Перегудин С. И., Холодова С. Е. Взаимодействие трехмерных волн конечной амплитуды в двухслойной жидкости с вертикальной стенкой при произвольном подходе // Математическое моделирование. РАН. Т. 12. 2000. № 3. С. 38–39.

Перегудин С. И. Пространственные волновые движения на поверхности сыпучих сред. // Труды Средневолжского математического общества. 2003. Т. 5. № 1. С. 130–138.

Перегудин С. И., Холодова С. Е. Воздействие пространственных волн малой амплитуды на рельеф дна // Процессы управления и устойчивость: Тезисы доклада. СПб., 2003. С. 222–225.

S. Peregudin

LOW AMPLITUDE WAVES IN TWO-LAYER LIQUIDS OVER A HORIZONTAL BOTTOM

The article is devoted to non potential movements of two layers of ideal incompressible nonhomogenious liquid over a horizontal undeformable bottom. This mathematical model is given in linear approximation. The dispersion correlation characterizes the dependence of circular frequency upon wave number and relative depth of each layer.