

**ПОЛУКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
КОГЕРЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ
В БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ
АТОМАРНЫХ ГАЗОВ**

*(Работа выполнена при поддержке Минобразования РФ и РФФИ,
проект № 01-02-17075)*

Предложена полуклассическая теория рассеяния и распространения света в бозе–эйнштейновском конденсате разреженного атомарного газа. Выбрав в качестве базиса состояний состояния атомов с определенными значениями импульсов, мы приводим вывод нелинейного уравнения Шредингера. Его решения описывают эволюцию интенсивности излучения и заселенностей когерентных атомных состояний с различными значениями импульсов отдачи.

В последнее время большой интерес вызывают исследования, связанные с получением бозе–эйнштейновского конденсата разреженных паров щелочных металлов с помощью лазерного и испарительного охлаждения [1–6]. обстоятельные обзоры теоретических и экспериментальных достижений в этой области можно найти в работах [7–8].

Общий подход к проблеме взаимодействия света с вырожденным бозегазом атомов содержится в работах [9–11]. В частности, квантовоэлектродинамическое описание рассеяния света на БЭК было выполнено в статье [12]. Полуклассическая теория сверхизлучательного рассеяния для модели «одетого» атома была развита в работах [13–14]. Авторы этих работ эффективно исключают из рассмотрения возбужденные электронные состояния и ограничиваются базисом, состоящим из основных электронных состояний с различными импульсами поступательного движения. Записанные в таком базисе уравнения Максвелла—Блоха дополнены феноменологическими релаксационными членами, в частности, членом, описывающим линейные потери поля за счет выхода излучения из системы. В наших работах [15–17], обобщение которых представляет данная публикация, мы также используем полуклассический подход, но сохраняем в базисе возбужденные электронные состояния и явным образом решаем задачу о распространении света через систему.

Так же, как в упомянутых выше работах [10–11], мы рассматриваем БЭК как идеальный газ, пренебрегая прямыми межатомными взаимодействиями и учитывая лишь взаимодействие атомов с поперечным электромагнитным полем. Такая возможность оправдывается оценкой величины химического потенциала при температурах ниже критической. Для системы, использованной в экспериментах [4–6], химический потенциал на один-два порядка меньше кинетической энергии атомов, получаемой ими в процессе рассеяния.

1. Экспериментальное обнаружение сверхизлучательных эффектов в БЭК

А. Сверхизлучательное рассеяние света

Обычное (спонтанное) рэлеевское рассеяние — это линейный по падающему (рассеиваемому) полю процесс. Падающее поле наводит в атомах дипольные моменты, которые, в свою очередь, создают вторичное (рассеянное) поле излучения. Другими словами, рассеянное поле представляет собой сумму вторичных полей, излученных отдельными атомами. Если бы рассеивающая среда была абсолютно однородной, то из-за интерференции вторичных полей возникало бы излучение только вперед — это так называемая когерентная часть рассеяния. Атом, участвующий в когерентном рассеянии, не изменяет своего импульса и остается в состоянии бозе–эйнштейновской конденсации. При наличии флуктуаций плотности рассеивающей среды возникает некогерентное рэлеевское рассеяние. Интенсивность некогерентного рэлеевского рассеяния складывается из интенсивностей рассеяния отдельными атомами. Таким образом, описание некогерентного рассеяния системой атомов сводится к задаче о рассеянии одним атомом. В случае бозе–эйнштейновской конденсации некогерентное рассеяние обусловлено квантовыми флуктуациями плотности распределения частиц.

В отличие от обычного рэлеевского рассеяния, при кооперативном рассеянии учитывается действие вторичных полей одних атомов на другие. Очевидно, что так следует поступать, когда вторичное поле достаточно интенсивно. Это процесс, родственник вынужденному рассеянию, где роль «вынуждающего» поля играет само поле рассеяния. Если кооперативное рассеяние происходит в условиях сохранения фазовой памяти атомов, то его естественно характеризовать как сверхизлучательное. При рэлеевском рассеянии предполагается, что после акта рассеяния атом возвращается в исходное состояние. Если же удастся различить исходное и конечное состояния по энергии, а падающий и рассеянный свет — по частоте, то рассеяние называют комбинационным, или рамановским. При рассеянии, наблюдавшемся в эксперименте, описанном в работе [4], конечное состояние атома отличается от начального импульсом поступательного движения, а частота рассеянного излучения отличается от частоты возбуждающего поля на величину кинетической энергии атома, получившего импульс отдачи. Поэтому рассматриваемый процесс скорее следует рассматривать как рамановский. Чтобы избежать терминологической неточности, мы будем называть рассматриваемый эффект просто сверхизлучательным рассеянием.

В эксперименте, описанном в работе [4], бозе–эйнштейновский конденсат разреженных паров натрия был приготовлен в магнитной ловушке с помощью лазерного охлаждения и испарения. Атомы натрия находились в основном состоянии сверхтонкой структуры $F = 1, 3S_{1/2}$. Магнитная ловушка имела вытянутую форму с размерами 20 мкм в диаметре и 200 мкм — в длину. Число атомов в ловушке — порядка 10^7 . Образец подвергался облучению лазерным импульсом, частота которого была сдвинута в красную сторону на 1,7 ГГц от частоты перехода $3S_{1/2} \rightarrow 3S_{3/2}$. Длина волны этого перехода $\lambda = 589$ нм. Лазерный пучок пересекал конденсат перпендикулярно его оси. Типичная интенсивность лазерного луча $1 \dots 100$ мВт/см², а длительность импульса — $10 \dots 800$ мкс.

Исследовалась не только интенсивность рассеянного излучения, но также и распределение импульсов поступательного движения атомов, которые они

получали в результате взаимодействия с лазерными и рассеянными фотонами. С этой целью сразу же после лазерного облучения магнитная ловушка выключалась, и с помощью резонансного пробного луча фотографировалось положение атомов в пространстве спустя 20–50 мс.

Авторы отмечают различный эффект в зависимости от поляризации лазерного луча. При поляризации, параллельной оси образца, наблюдалось движение атомов, соответствующее импульсам отдачи, как при обычном (некогерентном) рэлеевском рассеянии с диаграммой направленности $\sin^2\theta$, где θ — угол между направлением поляризации и направлением наблюдения. Однако если поляризация лазерного луча была перпендикулярна оси образца, то наблюдалось интенсивное рассеяние вдоль образца. Атом, участвующий в процессе рассеяния, получает импульс лазерного фотона, направленный вдоль лазерного луча, а при испускании рассеянного фотона — такой же импульс по величине, но направленный вдоль образца. Результирующий импульс атома оказывается направленным под углом в 45° к оси образца. Некоторые атомы успевают принять участие в последующих актах рассеяния и соответственно получают дополнительные импульсы. Все эти процессы происходят за время действия лазерного импульса. Выключение ловушки позволяет только проследить дальнейшее движение атомов в соответствии с приобретенными импульсами. Кроме зависимости рассеяния от поляризации лазерного луча авторы отмечают существование порога интенсивности, ниже которого наблюдается лишь обычное спонтанное рассеяние, импульс которого имеет такую же форму, как и возбуждающий.

Б. Усиление света в БЭК

В экспериментах, описанных в работе [5], по усилению света конденсат паров натрия (такой же, как в предыдущем эксперименте) облучался двумя лазерными пучками: одевающим и пробным. Оба пучка лежали в плоскости, перпендикулярной оси вытянутости конденсата и пересекали друг друга под углом 135° . Основным результатом этого эксперимента заключался в обнаружении усиления пробного луча при включенном одевающем луче. При низкой интенсивности пробного луча при выключении одевающего луча отчетливо наблюдалось прекращение усиления. Однако при больших интенсивностях одевающего луча наблюдалось остаточное усиление даже при выключении пробного луча на входе. Это своеобразный голографический эффект: пробный луч возникал на выходе благодаря дифракции одевающего луча на дифракционной решетке атомов, получивших импульсы отдачи. Кроме того, наблюдалось запаздывание пробного импульса на выходе, что интерпретировалось как уменьшение групповой скорости света до величины 1 м/с.

В. Индуцированная прозрачность и сокращение групповой скорости света

Сокращение групповой скорости благодаря наведению индуцированной прозрачности наблюдалось в эксперименте, описанном в работе [6]. Эксперимент проводился с парами натрия, охлажденными до температуры фазового перехода $T_c = 435\text{ нК}$ при пиковой плотности облака $5 \times 10^{12}\text{ см}^{-3}$. На систему направлялись два взаимно перпендикулярных пучка: пробный и связывающий, настроенные соответственно в резонанс с переходами $1 \rightarrow 3$ и $2 \rightarrow 3$, где состояния 1 и 2 соответствуют подуровням сверхтонкой структуры основного терма $3S_{1/2}$, а состояние 3 — одному из подуровней сверхтонкой струк-

туры возбужденного состояния $3S_{3/2}$. Первоначально заселенным является только уровень 1. Более интенсивный связывающий луч создает когерентную суперпозицию состояний 2 и 3, и в результате для перехода $1 \rightarrow 3$ возникает прозрачность в некотором узком частотном интервале. В этом же интервале возникает линейная дисперсия, приводящая к сокращению групповой скорости света.

2. Нелинейное уравнение Шредингера

Считая падающие лазерные пучки квазирезонансными с одним из электронных переходов в атоме, каждый атом будем рассматривать как двухуровневую или трехуровневую электронную систему. Атом будем характеризовать не только его электронным состоянием, но и состоянием поступательного движения с определенным значением импульса. Мы предполагаем, что в исходном состоянии все атомы находятся в основном электронном состоянии с почти нулевым значением импульса. При взаимодействии атома с излучением выполняется закон сохранения импульса. Формально это обеспечивается правилами отбора. Матричный элемент взаимодействия атома с электромагнитной волной с волновым вектором \mathbf{k} отличен от нуля для конечного состояния атома, импульс которого отличается от исходного на величину $\hbar\mathbf{k}$. Электронные состояния атома (основное и возбужденное) будем отмечать индексами a и b : φ_a, φ_b . Поступательное движение будем описывать собственными функциями импульса. Например, базис волновых функций двухуровневого атома мы выбираем в виде

$$\begin{aligned} |a; \mathbf{k}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \varphi_a, \\ |b; \mathbf{k}'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) \varphi_b \exp(-i\omega_0 t), \end{aligned} \quad (1)$$

где ω_0 — частота лазерного поля, V — объем системы. Отметим, что функции (1) отличаются от волновых функций свободного атома зависящим от времени фазовым множителем, в котором вместо частоты, соответствующей собственному значению энергии атома (в которой должна быть учтена также и кинетическая энергия поступательного движения), мы берем частоту квазирезонансного лазерного поля. В общем случае временные фазовые множители будем выбирать так, чтобы для состояний, связанных полем, они отличались по частоте на частоту этого поля. Выбранное на таком базисе представление отличается от обычно используемого представления «взаимодействия», и соответствующие поправки появятся в уравнении Шредингера.

Общее выражение для волновой функции атома может быть записано в виде

$$\Psi = \sum_{a, \mathbf{k}} C_{a, \mathbf{k}} |a; \mathbf{k}\rangle, \quad (2)$$

где $C_{a, \mathbf{k}}$ — зависящие от времени коэффициенты разложения. Элементы соответствующей матрицы плотности могут быть представлены в виде

$$R_{a, \mathbf{k}; b, \mathbf{k}'} = C_{a, \mathbf{k}} \overline{C_{b, \mathbf{k}'}} , \quad (3)$$

где чертой обозначено комплексное сопряжение.

Мы будем рассматривать взаимодействие атомов, образующих бозе-эйнштейновский конденсат, с n модами электромагнитного поля E_j , имеющими форму плоских волн с хорошо различимыми волновыми векторами \mathbf{k}_j . Очевидно, что взаимодействие с модой E_j связывает состояния $|a, \mathbf{k}\rangle$ и $|b, \mathbf{k}\rangle$, только если $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \pm \mathbf{k}_j$.

Каждая из мод создает поляризованность среды (конденсата) и в свою очередь поляризованность индуцирует вторичное поле этой же моды E'_j . В одномерном случае вторичное поле выражается через поляризованность следующим образом:

$$E'_j(y, t) = \frac{2\pi i \omega_j}{c} \int_0^L P_j(y', t - \frac{|y - y'|}{c}) \times \exp(ik_j |y - y'|) \exp(-i\omega_j t) dy' + c.c. \quad (4)$$

где c — скорость света в вакууме; $P_j(y', t)$ — комплексные амплитуды поляризованности среды; y — координата рассматриваемой моды; L — длина конденсата вдоль этой координаты. Эти амплитуды поляризованности, в свою очередь, выражаются через недиагональные элементы матрицы плотности как среднее квантовомеханическое значение оператора поляризованности [15]:

$$P_j(y', t) = N_0 d \exp(ik_j y') \sum_{\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{k}_j} R_{b, \mathbf{k}; a, \mathbf{k}'}, \quad (5)$$

где N_0 — концентрация атомов в конденсате, d — матричный элемент дипольного момента перехода.

Пренебрегая запаздыванием в амплитуде поляризованности и вкладом быстро осциллирующих членов при интегрировании по y' , получаем

$$E'_j = \frac{2\pi i \omega_j d N_0 y}{c} \exp(-i\omega_j t) \exp(ik_j y) \sum_{\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{k}_j} R_{b, \mathbf{k}; a, \mathbf{k}'}. \quad (6)$$

Как видно, поле, индуцированное пространственно однородной волной поляризации, линейно по y . Далее мы заменим эту величину средним значением, положив $y = L/2$ в первом множителе (6). Кроме того, выберем величину $\hbar / \tau_R d$ в качестве единицы напряженности электрического поля, где

$$\tau_R = \frac{c \hbar}{\pi \omega_0 d^2 N_0 L}, \quad (7)$$

Здесь ω_0 — частота одной из мод поля. (Для упрощения записи уравнений мы положим пока $\omega_j = \omega_0$ для всех j). Величину τ_R мы выберем в качестве единицы времени. Напомним, что квадрат модуля амплитуды поля в выбранных единицах равен числу фотонов, испущенных одним атомом за время τ_R (см., например, работу [19]).

Используя оператор взаимодействия атома с электромагнитным полем в виде

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hat{d}E, \quad (8)$$

запишем уравнение Шредингера для одного атома. Состояния всех атомов мы предполагаем тождественными в соответствии с требованием симметрии волновой функции системы бозе-частиц. В приближении вращающейся волны получаем

$$\dot{C}_{a,k} = \sum_j \overline{E_j} C_{b,k+k_j} - i\varepsilon_k C_{a,k}, \quad (9)$$

$$\dot{C}_{b,k} = -\sum_j E_j C_{a,k-k_j} - (\gamma + i\varepsilon_k + i\Delta) C_{a,k},$$

где

$$E_j = E_j^0 + \sum_{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}_j} C_{b,\mathbf{k}'} \overline{C_{a,\mathbf{k}}}, \quad (10)$$

Здесь величины E_j с точностью до фазового множителя i — частоты Раби соответствующих полей в единицах τ_R^{-1} , E_j^0 — частота Раби падающего поля. Поскольку амплитуды полей (частоты Раби) выражаются через коэффициенты разложения волновой функции по выбранному базису состояний, уравнение Шредингера оказывается нелинейным. Далее, в этом уравнении $\Delta = \omega_{ba} - \omega_0$ — расстройка, ε_k — кинетическая энергия атома, обладающего импульсом \mathbf{k} , γ — радиационная константа возбужденного электронного состояния атома, которая описывает спонтанное рассеяние света в произвольных направлениях. Все эти параметры также записаны в единицах τ_R .

3. Сверхизлучательное рассеяние

В соответствии с условиями эксперимента [4] (см. п.2) мы будем рассматривать взаимодействие атомов с тремя плоскими волнами электромагнитного поля: возбуждающий лазерный луч будем считать направленным перпендикулярно оси конденсата, а рассеянные волны — вдоль конденсата в противоположных направлениях. Обозначим эти поля соответственно через E_0 , E_+ , E_- , а их волновые векторы — соответственно \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_+ , \mathbf{k}_- . Здесь мы приведем результаты решений систем уравнений (9) с целью продемонстрировать качественное согласие теоретических результатов с экспериментальными. При этом мы ограничимся учетом не более чем двукратных актов рассеяния одним атомом.

Кроме процессов взаимодействия с полями E_0 , E_+ , E_- имеет место некогерентное рассеяние в произвольном направлении. Некогерентное (спонтанное) рассеяние является не только альтернативным процессом, но и иницирующим фактором для кооперативного рассеяния. Оценим интенсивность W (число фотонов за время τ_R) спонтанного рассеяния (одним атомом) в телесном угле образца. Энергия излучения диполя d , осциллирующего с частотой ω_0 , в направлении, перпендикулярном диполю в телесный угол $d\Omega$, равна

$$dI = \frac{d^2 \omega_0^4}{4\pi c^3} d\Omega. \quad (11)$$

Представляя средний дипольный момент атома, наведенный лазерным полем, как $d \cdot R_{a,0;b,\mathbf{k}_0}$, мы получим следующее выражение для интересующей нас интенсивности:

$$W = \frac{|R_{a,0;b,\mathbf{k}_0}|^2}{\lambda^2 N_0 L} \cdot \frac{D^2}{E^2}, \quad (12)$$

где $\lambda = 2\pi c / \omega_0$; D — поперечный размер конденсата. Отсюда следует, что амплитуда флуктуационного поля (в наших единицах) равна $E_{fl} = |R_{a,0;b,\mathbf{k}_0}| \cdot s$,

где

$$s = \left(\frac{1}{N_0 \lambda^2 L} \right)^{1/2} \frac{D}{L}. \quad (13)$$

В уравнении Шредингера мы добавим это поле к полям E_{\pm} как затравочное. Для условий эксперимента [4] параметр s имеет порядок 0,001.

Для задания импульса атома в рассматриваемом эксперименте достаточно задать две его компоненты. Условимся направление лазерного луча принимать за ось X , а направление вытянутости конденсата — за ось Y . Тогда система состояний атома, необходимая для описания рассеяния, будет иметь вид $|a; k_x, k_y \rangle$, $|b; k_x', k_y' \rangle$. Ограничиваясь актами не более чем двукратного рассеяния, пронумеруем эти состояния одним индексом следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= |a; 0, 0 \rangle, \\ \Psi_2 &= |a; k_0, -k_0 \rangle, \\ \Psi_3 &= |b; k_0, 0 \rangle, \\ \Psi_4 &= |a; k_0, k_0 \rangle, \\ \Psi_5 &= |b; 2k_0, -k_0 \rangle, \\ \Psi_6 &= |b; 2k_0, k_0 \rangle, \\ \Psi_7 &= |a; 2k_0, -2k_0 \rangle, \\ \Psi_8 &= |a; 2k_0, 0 \rangle, \\ \Psi_9 &= |a; 2k_0, 2k_0 \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Переходы между этими состояниями поясняются диаграммой (рис. 1). Отметим, что собственные частоты этих переходов отличаются друг от друга вкладом в каждый уровень кинетической энергии атома.

В этом случае уравнение Шредингера (9) будет иметь вид

$$\begin{aligned} C_1 &= \overline{E}_0 C_3, \\ C_2 &= \overline{E}_+ C_3 + \overline{E}_0 C_5, \\ C_3 &= (i\Delta - \gamma/2) C_3 - E_+ C_2 - E_- C_4 - E_0 C_1, \\ C_4 &= \overline{E}_- C_3 + \overline{E}_0 C_6, \\ C_5 &= (i\Delta - \gamma/2) C_5 - E_+ C_7 - E_- C_8 - E_0 C_2, \\ C_6 &= (i\Delta - \gamma/2) C_6 - E_+ C_8 - E_- C_9 - E_0 C_4, \\ C_7 &= \overline{E}_+ C_5, \\ C_8 &= \overline{E}_+ C_6 + \overline{E}_- C_5, \\ C_9 &= \overline{E}_- C_6. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь C_i — коэффициенты разложения волновой функции по выбранному ранее базису (14), а

$$\begin{aligned} E_+ &= \overline{C}_2 C_3 + \overline{C}_7 C_5 + \overline{C}_8 C_6 + s |\overline{C}_3 C_1|, \\ E_- &= \overline{C}_4 C_3 + \overline{C}_8 C_5 + \overline{C}_9 C_6 + s |\overline{C}_3 C_1|. \end{aligned} \quad (16)$$

в соответствии с (10). При описанной выше постановке задачи единственным ненулевым начальным условием будет $C_1(0) = 1$.

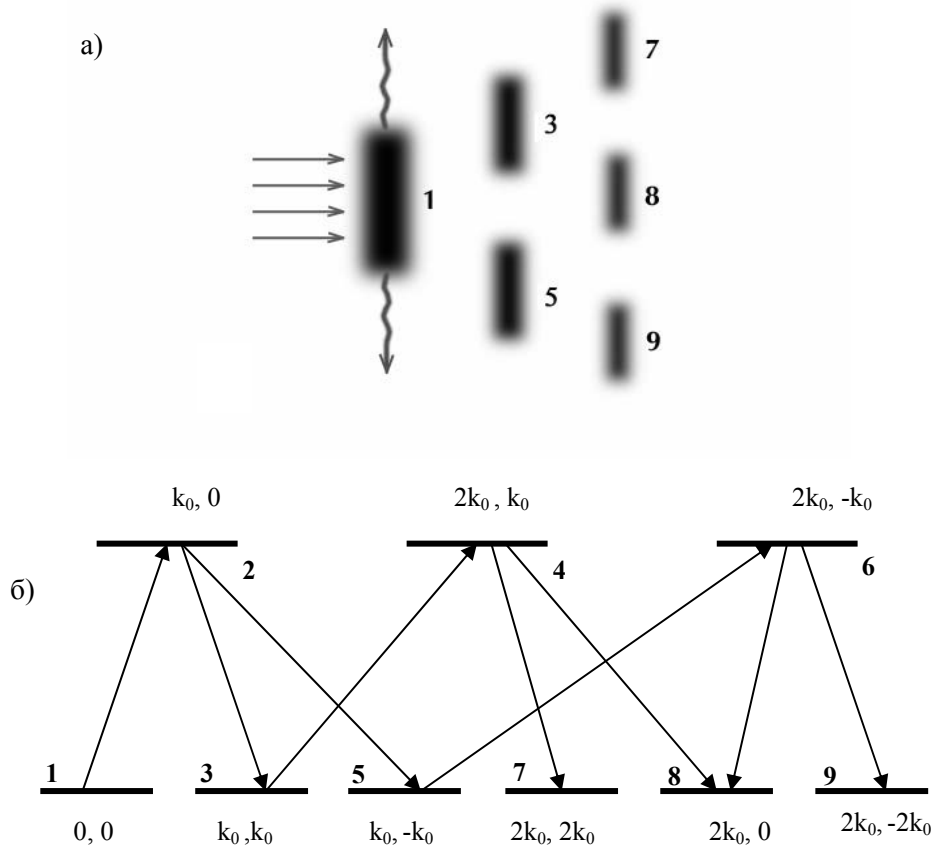


Рис. 1. Сверхизлучательное рассеяние света:

а) схема формирования когерентных атомных состояний с отличными от нуля импульсами. Подлинную фотографию этих когерентных атомных "облаков" можно найти в работе [4]; б) схема переходов между когерентными атомными состояниями. Нумерация состояний проведена в соответствии с формулой (14). Для каждого состояния указаны x и y составляющие импульса поступательного движения атома

В конце п. 2 мы привели порядки величин параметров, которые характеризуют рассматриваемый эффект [4]. Напомним, что в качестве единицы времени мы выбрали время сверхизлучения τ_R , которое для условий эксперимента имеет порядок 10^{-11} с. Поэтому радиационная константа перехода γ в единицах τ_R^{-1} будет иметь порядок 10^{-3} , расстройка $\Delta = 10^{-1}$, напряженность электрического поля в лазерном пучке (в единицах $\hbar/d\tau_R$) $E_0 = 10^{-4} \dots 10^{-3}$, длительность импульса $T_p = 10^7$. Чтобы гарантировать точность расчета, мы были вынуждены уменьшить величину расстройки и длительность импульса по сравнению с экспериментальными значениями. Мы полагали $\Delta = 0,04$ и $T_p = 10^5$. Эти ограничения не являются принципиальными и могут быть преодолены при применении более рационального метода интегрирования полученных уравнений.

На рис. 2 приведены результаты решения системы (15), иллюстрирующие форму и интенсивность рассеянного импульса, а также динамику заселения когерентных атомных состояний с различными импульсами поступательного движения. Предполагалось, что лазерный импульс имел гауссову форму. Мы

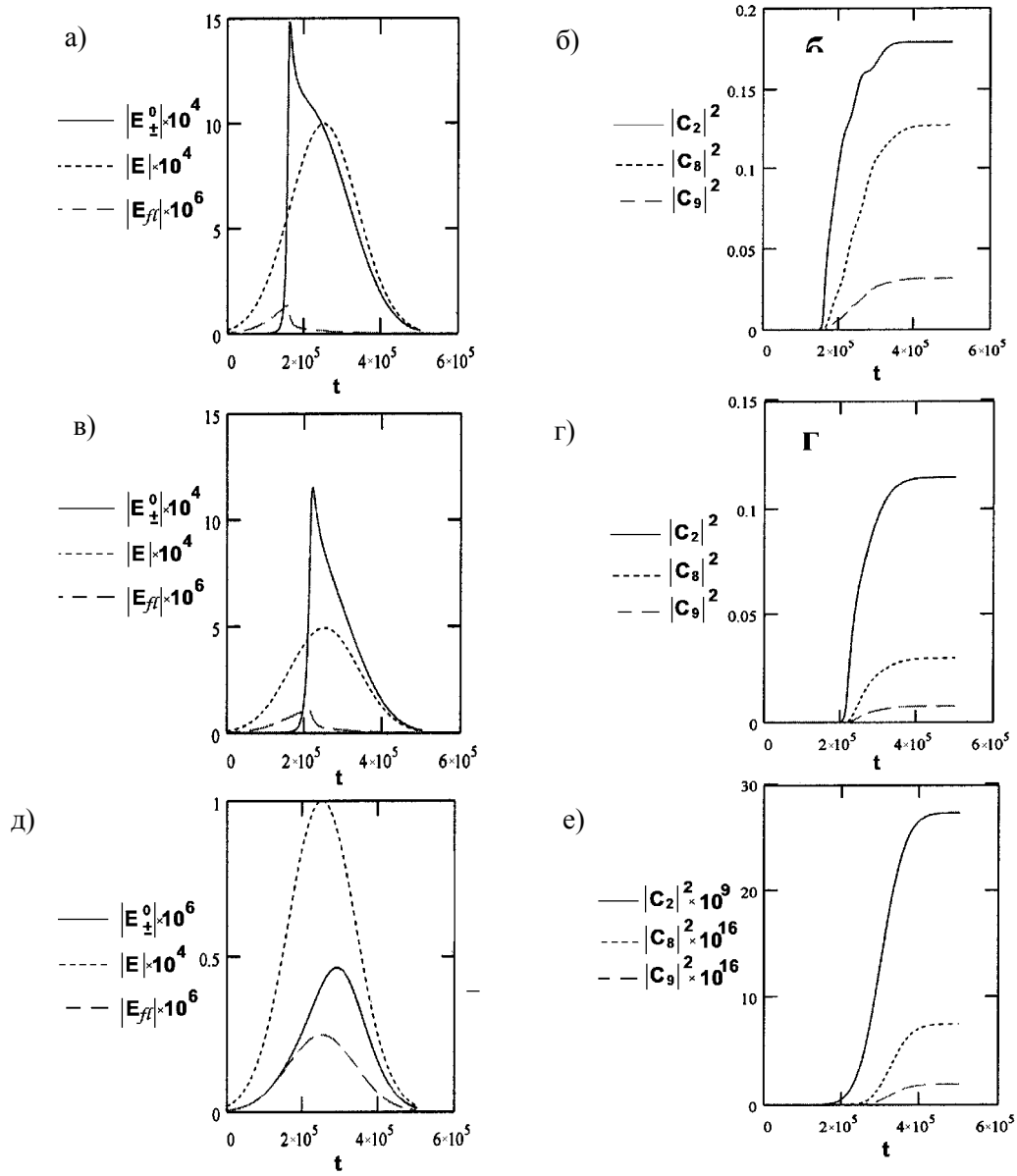


Рис. 2. Импульсы света, рассеянного вдоль конденсата (а, в, д), и временная зависимость населенности атомных состояний (б, г, е) при различных интенсивностях лазерного луча для модели, учитывающей однократные и двукратные процессы рассеяния:

на рис. 2, а, б — $E = 10^{-3}$; на рис. 2, в, г — $E = 5 \times 10^{-4}$; на рис. 2, д, е — $E = 10^{-4}$.

Значения поля E указаны в единицах $\hbar/v\tau_R$, а времени — в единицах τ_R .

На рис. 2, а, в, д пунктирной кривой показан импульс возбуждающего лазерного поля, а штриховой кривой — флуктуационное затравочное поле, определяемое по интенсивности некогерентного рэлеевского рассеяния

проводили расчеты для различных интенсивностей лазерного поля. Видно, что при амплитуде лазерного поля $E_0 = 10^{-3}$ доля атомов с импульсами ($k_0, \pm k_0$) после прекращения лазерного облучения составляет около 0,2 для каждого из двух направлений рассеяния. С уменьшением E_0 происходит изменение формы импульса рассеяния (увеличивается время задержки), а при достижении значения $E_0 = 10^{-4}$ резко уменьшаются интенсивности рассеянных импульсов света и когерентных атомных волн (на четыре порядка величины). Можно сказать, что здесь проявляется порог сверхизлучательного рассеяния. В этом случае интенсивность направленного вдоль конденсата рассеяния — такого же порядка, как и интенсивность некогерентного рассеяния.

4. Когерентное усиление света

Схема переходов, описывающая этот эффект [5] (см. п. 1) при ограничении актами возбуждения первого порядка, приведена на рис. 3. Здесь E_d и E_p — амплитуды одевающего и пробного полей, а \mathbf{k}_d и \mathbf{k}_p — их волновые векторы. Уравнение Шредингера (9) в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} C_1 &= \overline{E_d} C_2 + \overline{E_p} C_4, \\ C_2 &= -E_d C_1 - E_p C_3 - (\gamma + i\varepsilon_2 + i\Delta) C_2, \\ C_3 &= \overline{E_p} C_2 - i\varepsilon_3 C_3, \\ C_4 &= -E_p C_1 - E_d C_3 - (\gamma + i\varepsilon_4 + i\Delta) C_4, \\ C_5 &= \overline{E_d} C_4 - i\varepsilon_5 C_5, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} E_d &= E_d^0 + \overline{C_1} C_2 + \overline{C_5} C_4, \\ E_p &= E_p^0 + \overline{C_1} C_4 + \overline{C_3} C_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Так же, как в предыдущей задаче, единственным отличным от нуля начальным условием будет $C_1(0) = 1$.

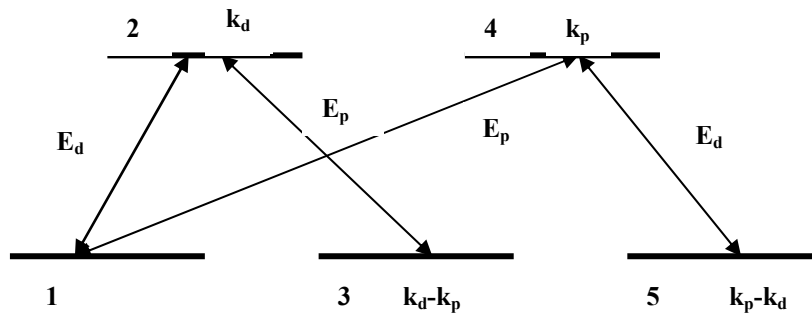


Рис. 3. Схема атомных переходов для описания усиления пробного поля E_p в присутствии одевающего поля E_d .

(В тексте мы используем нумерацию состояний 1–5, принятую в данной схеме.)

На рис. 4 мы приводим решение уравнений (17), которое иллюстрирует основные свойства когерентного усиления, обнаруженные в эксперименте [5].

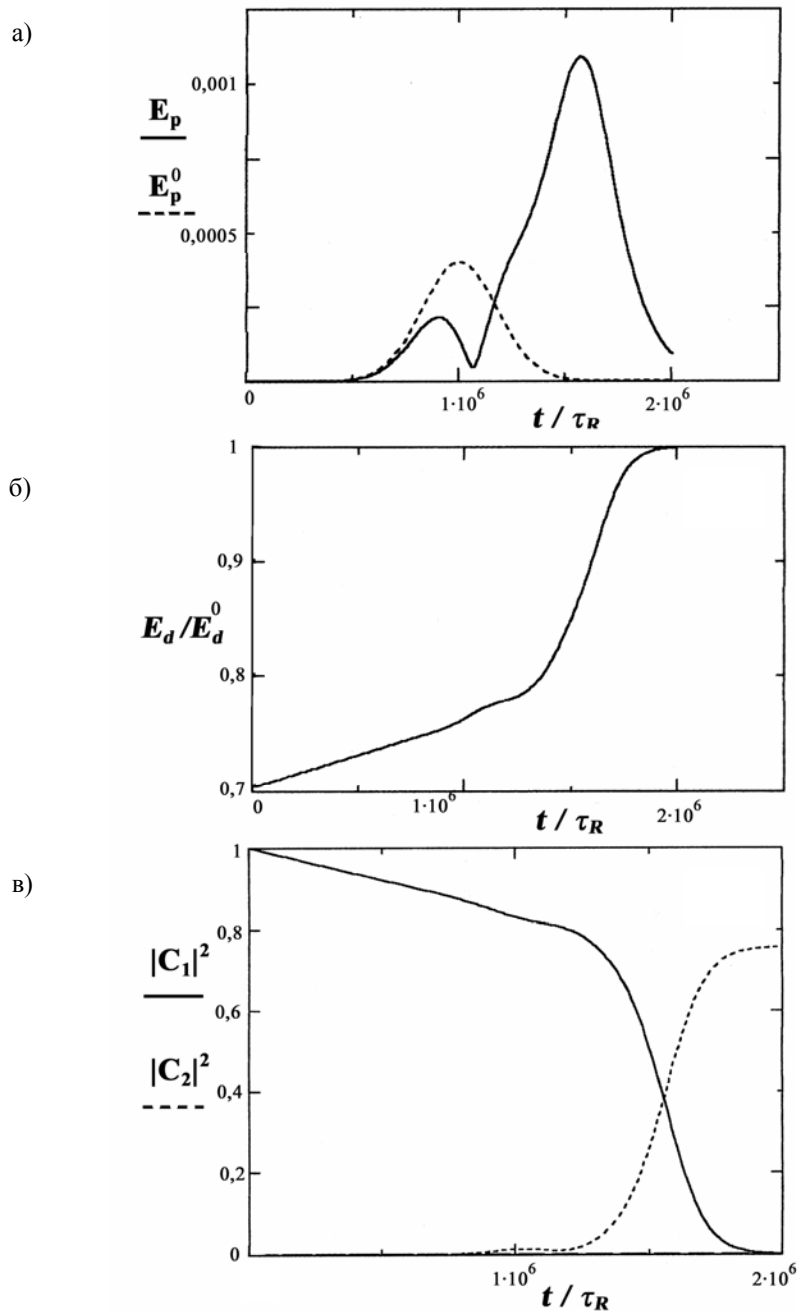


Рис. 4. Усиление пробного поля в присутствии одевающего поля:
 а — временная эволюция пробного поля (сплошная линия изображает пробный импульс на выходе, пунктирная линия — пробный импульс на входе);
 б — временная эволюция одевающего поля на выходе;
 в — временная эволюция населенностей атомных состояний (сплошная линия — населенность основного состояния, соответствующего бозе-эйнштейновской конденсации; пунктирная кривая — населенность состояния 2 — основного электронного состояния с импульсом $\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_p$).

На всех графиках время указано в единицах τ_R , а поля — в единицах $\hbar/d\tau_R$

Предполагалось, что пробный импульс имел гауссову форму при прямоугольной форме одевающего импульса. Для условий данного эксперимента время τ_R имело порядок 10^{-10} с. В этих единицах время одевающего импульса выбиралось равным 2×10^6 , пробного импульса на половине высоты — в шесть раз короче. Частоты Раби для этих импульсов полагались равными соответственно 0,004 и 0,0004, расстройка $\Delta = 1$, $\gamma = 0,001$. Мы предполагали, что частота пробного импульса удовлетворяет условию $\omega_p = \omega_d - \varepsilon_2$, где ε_2 — кинетическая энергия атома в состоянии 2. Значение этого резонансного условия, обнаруженного экспериментально, подтверждается расчетом и служит основанием для ограничения каскада возбуждений. На рис. 4, а можно увидеть усиление импульса по амплитуде приблизительно в три раза. Максимум пробного импульса появляется с большой задержкой по сравнению с максимумом на входе (порядка 0,0001 с), что соответствует сокращению групповой скорости света до величины порядка 0,1 м/с (при протяженности конденсата порядка 10 мкм).

5. Индуцированная прозрачность и сокращение групповой скорости света

В отличие от рассмотренных выше эффектов, в которых рассматривалась двухуровневая модель атома, здесь будет использована модель трехуровневого атома. Схема переходов представлена на рис. 5. Поскольку эффект носит резонансный характер, то каждому из трех электронных уровней однозначно может быть приписано значение импульса атома. Основному состоянию 1 соответствует нулевое значение импульса. Возбужденному состоянию 3 может быть приписано значение импульса, равное импульсу фотона \mathbf{k}_p пробного луча с амплитудой E_p^0 . Переход в состояние 2 происходит из состояния 3 под действием связывающего луча с амплитудой E_c^0 и с импульсом фотона \mathbf{k}_c , поэтому электронному состоянию 2 соответствует значение импульса атома $\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_c$.

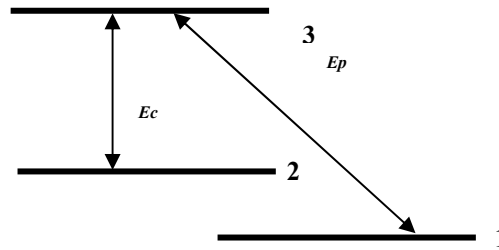


Рис. 5. Схема атомных переходов для описания эволюции связывающего E_c и пробного E_p полей

Уравнение Шредингера (9) для этой двухмодовой задачи с тремя уровнями принимает вид

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_3 \overline{E_p}, \\
 C_2 &= C_3 \overline{E_c}, \\
 C_3 &= -\gamma C_3 - C_1 E_p - C_2 E_c,
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} E_c &= E_c^0 + \overline{C_2} C_3, \\ E_p &= E_p^0 + \overline{C_1} C_3. \end{aligned} \quad (20)$$

На рис.6 показаны результаты решения уравнений (19). Предполагалось, что связывающий импульс имел прямоугольную форму, а пробный — гауссову. Оценочное значение τ_R для условий эксперимента имело порядок 10^{-10} с. В соответствующих единицах длительность пробного импульса выбиралась равной 5×10^4 , $y = 0,01$, частоты Раби связывающего и пробного полей соответственно $E_c^0 = 0,01$ и $E_s^0 = 0,001$. Напомним, что формулы (20) дают выражение для средних по объему полей. Поэтому в соответствии с линейной зависимостью вторичного поля от длины значение пробного поля на выходе мы полагали равным $E_{p,вых} = E_p^0 + 2\overline{C_1} C_3$. На рис. 6 хорошо видна задержка выходного пробного импульса. Она составляет величину порядка $2 \times 10^4 \tau_R$, или 2×10^{-6} с. Тогда для длины ловушки порядка $200 \mu\text{m}$ получаем групповую скорость света порядка 100 м/с .

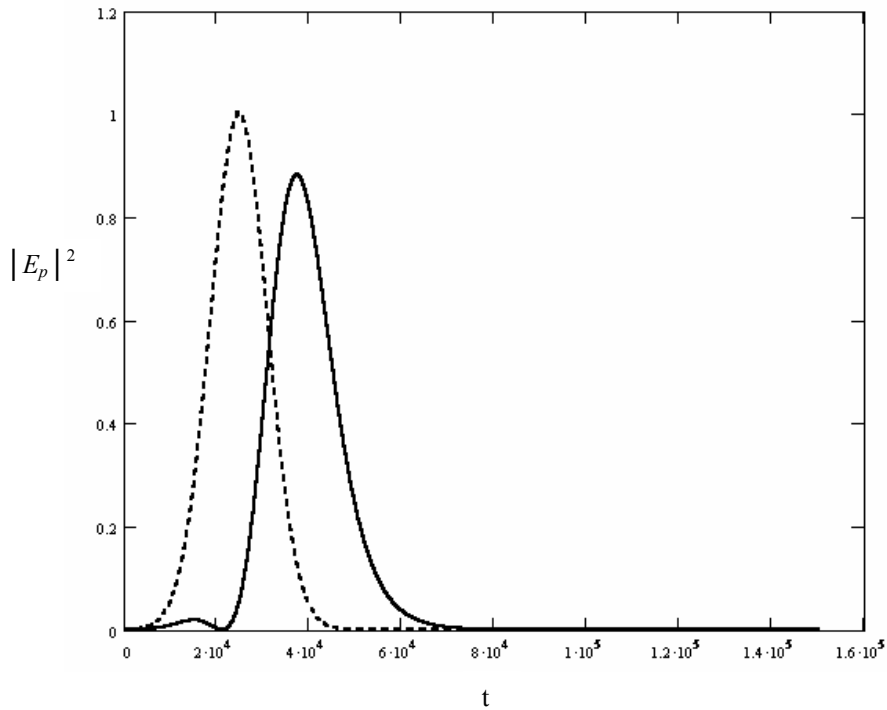


Рис. 6. Задержка пробного импульса в присутствии связывающего поля:
пунктирная линия — интенсивность пробного поля на входе,
сплошная линия — интенсивность пробного поля на выходе

* * *

В заключение еще раз подчеркнем роль БЭК в рассматриваемом явлении. Сама система представляет собой разреженный газ с концентрацией 10^{13} – 10^{14} см^{-3} при сверхнизких температурах. В начальный момент времени атомы

находятся в основном электронном состоянии с почти нулевым значением импульса. Отсутствуют релаксационные процессы кроме радиационных, связывающих основное и возбужденное электронные состояния атома. Благодаря этому сохраняется фазовая корреляция между различными состояниями атомов. Формально это означает, что возникают долгоживущие недиагональные элементы матрицы плотности, соответствующие этим состояниям. Это придает сверхизлучательный характер взаимодействию атомов с излучением. Однако, в отличие от обычной теории сверхизлучения, в которой атомы предполагаются пространственно локализованными, здесь они делокализованы по всему объему БЭК, как в состоянии с определенным значением импульса. В результате амплитуды волн поляризованности оказываются пространственно однородными и зависящими от среднего по объему значения поля. Это в определенной степени даже упрощает аппарат теории: вместо уравнений в частных производных мы ограничиваемся обыкновенными дифференциальными уравнениями по временной переменной.

С помощью единого подхода рассмотрена теория различных явлений, которые наблюдались экспериментально: рассеяние света [4], усиление пробного луча в присутствии одевающего [5], индуцированная прозрачность и сокращение групповой скорости света [6]. Первый из этих эффектов был назван авторами сверхизлучательным рассеянием. Аналогия со сверхизлучением Дике [18] связана с тем, что рассеиваемое лазерное поле, действуя на основное состояние атома, создает виртуальное состояние, энергия которого близка к частоте лазерного поля. Причем заселенность этого состояния такая же, как основного состояния. Из этого состояния возможен переход в основное электронное состояние, но с отличным от нуля импульсом поступательного движения, которое не заселено.

Таким образом, возникает инверсия заселенности, которая приводит к сверхизлучению Дике. Напомним, что обычное рэлеевское рассеяние тоже получается в результате этого перехода, и его интенсивность, отнесенная к одному атому, имеет порядок $(E_0/\Delta)^2 \gamma \hbar \omega$, в то время как интенсивность сверхизлучения отличается от этой величины фактором $N_0 \lambda^2 L$. Для условий эксперимента он имеет порядок 10^3 . Второй эффект — усиление — может быть аналогичным образом интерпретировано как вынужденное (или триггерное) сверхизлучение. Индуцированная прозрачность объясняется тем, что связывающее поле, резонансное для перехода $2 \leftrightarrow 3$, создает два виртуальных состояния. В результате на частоте перехода $1 \leftrightarrow 3$ возникает прозрачность. Кроме того, именно в окрестности этой частоты показатель преломления оказывается линейной функцией частоты, что приводит к задержке пробного импульса, если его спектр укладывается в интервал линейности. Наше рассмотрение является более общим: мы не используем данную выше интерпретацию как исходные предположения — наоборот, она может быть получена в результате упрощения наших уравнений, строгие решения которых воспроизводят наблюдаемые эффекты.

Автор выражает благодарность В. Кеттерле, В. Л. Гуревичу, В. И. Перелю за интерес к работе, А. С. Трошину, И. В. Соколову, А. И. Зайцеву, Д. С. Булянице — за обсуждение и полезные замечания, Н. А. Васильеву — за помощь в проведении численных расчетов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Anderson M. H., Ensher J. R., Matthews M. R., Wieman C. E., Cornell E. A. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor // *Science*. 1995. V. 269. P. 198–201.
2. Hall D. S., Matthews M. R., Wieman C. E., Cornell E. A. Measurements of Relative Phase in Two-Component Bose-Einstein Condensates // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 1543–1546.
3. Davis K. B., Mewes M.-O., Andrews M. R., Druten N. J. van, Durfee D. S., Kurn D. M., Retterle W. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75. P. 3969–3973.
4. Inouye S., Chikkatur A. P., Stamper-Kurn D. M., Stenger J., Pritchard D. E., Ketterle W. Superradiant Rayleigh Scattering from a Bose-Einstein Condensate // *Science*. 1999. V. 285. P. 571–574.
5. Inouye S., Löw R. F., Gupta S., T. Pfau., Görlitz A., Gustavson T. L., Pritchard D. E., Ketterle W. Amplification of Light and Atoms in a Bose-Einstein Condensate // *Phys. Rev. Lett.*, 2000, V. 85. P. 4225–4228.
6. Hau L. V., Harris S. E., Dutton Z., Behroozi C. H. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas // *Nature*. 1999. V.397. P.594–598.
7. Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L. P., Stringari S. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases // *Rev. Mod. Phys.* 1999. V. 71. P. 463–512.
8. Courteille Ph. W., Bagnato V. S., V.I.Yukalov V. I. Bose-Einstein condensation in trapped atomic gases // *Laser Physics*. 2001. V. 11. P. 659–800.
9. Lenz G., Meystre P., Wright E. M. Nonlinear atom optics: General formalism and atomic solitons // *Phys. Rev. A*. 1994. V. 50. P. 1681–1684.
10. Castin Y., Mølmer K. Maxwell-Bloch equations: A new view of nonlinear optics and nonlinear atom optics // *Phys. Rev. A*. 1995. V. 51. P. R3426–R3429.
11. Javanainen J. Spectrum of light scattering from a degenerate bose gas // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75. P. 1927–1930.
12. Moore M. G., Meystre P. Theory of Superradiant Scattering of Laser Light from Bose-Einstein Condensation // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 5202–5205.
13. Mustecaplioglu O. E., You L. Superradiant light scattering from trapped Bose-Einstein condensation // *Phys. Rev.* 2000. V. 62 art. no. 063615–(1–12).
14. Piovella N., Gatelli M., Bonifacio R. Quantum effects in the collective light scattering by coherent atomic recoil in a Bose-Einstein condensation // *Optics Communications*. 2001. V. 194. P. 167–173.
15. Трифонов Е. Д. Теория сверхизлучательного рэлеевского рассеяния света бозе-эйнштейновским конденсатом // *ЖЭТФ*. 2001. Т. 120. № 5. С. 1117–1125.
16. Trifonov E. D. Semiclassical theory of super-radiant scattering and amplification in a Bose-Einstein condensate of atomic vapours // *Laser Physics*. 2002. V. 12. № 1. P.211–216.
17. Трифонов Е. Д. Полуклассическая теория сверхизлучательного рассеяния света на бозе-эйнштейновском конденсате // *Оптика и спектроскопия*. 2002. Т. 92. С. 631.
18. Dicke R.H. Coherence in spontaneous radiation processes // *Phys. Rev.* 1954. V. 93. № 1. P. 99–110.
19. Benedict M. G., Ermolaev A. M., Malyshev V. A., Sokolov I. V., Trifonov E. D. Super-radiance: multiatomic coherent emission. Bristol, Philadelphia; IOP Publishing, 1996.

E. Trifonov

SEMICLASSICAL THEORY OF COHERENT OPTICAL PROCESSES IN BOSE-EINSTEIN CONDENSATE OF ATOMIC VAPORS

A semiclassical theory of superradiant scattering and propagating of light in a Bose-Einstein condensate of dilute atomic vapours is proposed. Choosing atomic states with definite momentum as a basis we derive a nonlinear Schrodinger equation. The solutions of the equation describe the temporal evolution of light intensity and of the populations of the coherent atomic states with different recoil moments.