В. Ф. Зайцев

СИММЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ФОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Рассматриваются некоторые аспекты теории формальных операторов. Вводятся необходимые определения, обсуждаются свойства формальных операторов, допускаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, и доказываются теоремы о факторизации. Эти теоремы обобщают известные способы понижения порядка уравнений, допускающих локальные операторы, и дают возможность универсального описания всех «симметричных» уравнений.

Групповой анализ дифференциальных уравнений возник как направление в трудах Софуса Ли в конце XIX века и первоначально играл скорее организующую роль, так как складывалось впечатление, что к концу XIX века все практически важные уравнения, интегрирующиеся в замкнутом виде, уже найдены. Поэтому не случайно возрождение интереса к групповому анализу в середине XX века произошло в работах, посвященных уравнениям в частных производных, тем более что их частные решения, инвариантные относительно непрерывных групп преобразований, имеют четко выраженный физический смысл [7, 10, 11] (мы приводим лишь наиболее известные работы) и нередко являются решениями нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Это, в свою очередь, привело к появлению новых направлений исследований, так или иначе основанных на симметрии. Тем не менее, подчеркнем, что подавляющее большинство новых результатов было получено для уравнений в частных производных, а групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений применялся, как элементарная иллюстрация основных идей в различных обзорах, брошюрах и учебных пособиях (см., например, [8, 9, 12]).

Традиционное изложение основ группового анализа предполагает подробное изучение ***точечных групп преобразований плоскости***, тогда как дифференциальные уравнения встречаются не как основной объект исследования, а как вспомогательный аппарат. Конечно, можно было бы обойтись и без групп Ли, а сразу ввести локальные инфинитезимальные операторы. Однако оказывается, что найти их можно далеко не всегда, и вообще далеко не всякое обыкновенное дифференциальное уравнение допускает локальный оператор. Наконец, далеко не всегда существует локальный оператор, имеющий заданные инварианты, — универсальный I_0 и первый дифференциальный I_1.

В настоящей работе сделана попытка ввести определение универсального оператора [15], допускаемого произвольным обыкновенным дифференциальным уравнением. Преимущество такого подхода проявляется прежде всего в единообразном описании любых непрерывных симметрий уравнений, причем в нем a priori закладывается возможность распространения основных принципов на более широкие классы изучаемых объектов — в частности, на функционально-дифференциальные уравнения [13]. Тем не менее, следует отметить и некоторые неудобства, связанные в первую очередь с формальными определениями основных понятий — допускаемых операторов и их инвариантов. Теряется изначальная связь с группами преобразований и вообще с геометрическими представлениями.

1. Формальные операторы.

В работе будут рассматриваться обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка, разрешенные относительно старшей производной

$$y^{(n)} = F(x,y,y',\ldots,y^{n-1}), \tag{1}$$

задающие n-мерные гладкие (дифференцируемые) многообразия [F].

Пусть $X : \mathbf{C}^{\infty} \to \mathbf{C}^{\infty}$ — линейный (нелокальный) оператор вида

$$X = \Phi(x, y, y', \ldots)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2}$$

где функция Ф — ***координата канонического оператора (характеристика, производящая функция симметрии)*** — зависит (в общем случае) от производных любого сколь угодно высокого порядка. В частности, выражения вида

$$\int \zeta(x, y)dx, \qquad \iint \zeta(x, y)dxdx$$

могут быть представлены в виде бесконечного ряда по $y^{(k)}$, например,

$$\int ydx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k)}.$$

Поэтому в координату Ф могут входить нелокальные переменные, выраженные в явной форме в виде интегралов. Здесь и далее все интегралы — полные, т. е.

$$D_x\left(\int \zeta(x, y)dx\right) = \zeta(x, y),$$

где D_x — оператор полной производной

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(k)}}.$$

Подчеркнем, что приведенное выше разложение в ряд нигде далее не используется и носит чисто иллюстративный характер, зависимость нелокальной переменной от производных сколь угодно высокого порядка может быть доказана и другим способом. Вместе с тем очевидно, что для любой гладкой функции $y(x)$, производные которой до бесконечного порядка ограничены в совокупности, указанный ряд сходится всюду $(-\infty < x < +\infty)$.

Основные свойства операторов вида (2) совпадают со свойствами классических (локальных) инфинитезимальных операторов, хорошо известными в литературе [10,11]. ***Действие*** оператора (2) определяется с помощью формулы

$$X[F(x,y)] = \Phi(x,y,y',\ldots)\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Определение* 1**. Оператор (2) ***допускается уравнением (1), если

$$\underset{n}{X}\left[y^{(n)} - F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\right]\Big|_{[F]} = 0, \tag{3}$$

где

$$\underset{n}{X} = \sum D_x^k[\Phi]\frac{\partial}{\partial y^{(k)}}. \tag{4}$$

Выражение (4) называется n-м ***продолжением*** оператора (2), а символ $\Big|_{[F]}$ означает, что равенство (3) выполняется ***на многообразии*** [F] (синонимы: «на множестве решений уравнения (1)», «в силу уравнения (1)»).

Определение* 2**. Функцию $H(x,y,y',\ldots,y^{(k)}),\ \dfrac{\partial H}{\partial y^{(k)}} \neq 0$ будем называть дифференциальным инвариантом*** k-го порядка или k-м дифференциальным инвариантом оператора (2), если H удовлетворяет уравнению

$$\underset{k}{X}[H] = 0. \tag{5}$$

Замечание. В необходимых случаях выполнение равенства (5) рассматривается на многообразии, заданном уравнением (1).

2. Существование допускаемого оператора.

Теорема 1. Любое выражение $y^{(n)} - F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ является дифференциальным инвариантом n-го порядка не менее, чем для n различных (ненулевых) формальных операторов (2).

Доказательство. Согласно определению 2, дифференциальный инвариант n-го порядка должен удовлетворять уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} D_x^k[\Phi]\frac{\partial H}{\partial y^{(k)}} = 0. \tag{6}$$

Подставим в уравнение (6) вместо H известное выражение

$$H = y^{(n)} - F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$$

и рассмотрим равенство (6) как уравнение относительно неизвестной канонической координаты Ф. Это линейное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами в полных производных, его общее решение можно записать в виде

$$\Phi = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + \ldots + C_n\Phi_n, \tag{7}$$

где $\Phi_k,\quad k = \overline{1,n}$ — n линейно-независимых функций, зависящих, вообще говоря, от производных y сколь угодно высокого порядка, так как в общем случае решения таких уравнений не представимы в элементарных функциях и даже в квадратурах (последние, впрочем, являются интегральными выражениями и представляются через локальные переменные тоже лишь в виде бесконечных рядов).

Функции $\Phi_k,\quad k = \overline{1,n}$ удовлетворяют уравнению (6) тождественно, т. е. на произвольном многообразии, и, следовательно, заведомо удовлетворяют условию (3). Теорема доказана.

Следствие. Произвольное дифференциальное уравнение n-го порядка (1), задающее гладкое многообразие, допускает не менее n различных формальных операторов (2).

Т е о р е м а **2** [1]. Любое уравнение 1-го порядка

$$y' = F(x,y) \tag{8}$$

допускает ***единственный*** (с точностью до тождественных преобразований на многообразии) формальный оператор с координатой, не зависящей явно от производных

$$X = \exp\left(\int \frac{\partial F}{\partial y} dx \right) \partial_y . \tag{9}$$

Доказательство. Условие (3) для уравнения (8) имеет вид

$$\underset{1}{X}\left[y' - F(x,y) \right]\Big|_{[F]} = 0,$$

т. е.

$$D_x[\Phi] - \frac{\partial F}{\partial y}\Phi = 0,$$

откуда

$$\Phi = \exp\left(\int \frac{\partial F}{\partial y} dx \right).$$

Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема никак не противоречит общеизвестному утверждению, что любое уравнение 1-го порядка допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов вида

$$X = \xi(x,y)\partial_x + \xi(x,y)F(x,y)\partial_y ,$$

где $\xi(x,y)$ — произвольная функция. Переход к канонической форме

$$X \to \hat{X} = X - \xi(x,y)D_x$$

дает на многообразии (8) единственный (нулевой) оператор

$$\hat{X} = \xi(x,y)[F(x,y) - y']\partial_y \equiv 0 \cdot \partial_y .$$

Рассмотрим простой пример. Уравнение Абеля 2-го рода

$$yy' - y = -\frac{2(m+1)}{(m+3)^2}x + ax^m \tag{10}$$

не интегрируется в квадратурах алгоритмическими классическими методами, так как допускает не точечный, а нелокальный оператор

$$X = \exp\left(\frac{1-m}{m+3} \int y^{-1} dx \right) \left[2ax^{m+1} - (m+1)\left(y - \frac{2x}{m+3} \right)^2 \right] y^{-1}\partial_y . \tag{11}$$

Однако это уравнение все же может быть проинтегрировано [6], так как является следствием «неправильного понижения порядка» [12] уравнения

$$u'' = au^m,$$

допускающего двумерную точечную алгебру Ли. Это наводит на мысль о том, что нелокальные операторы содержат информацию об интегрируемости уравнения в замкнутом виде, если она имеет место.

В дальнейшем операторы типа (9) будут играть важную роль, поэтому примем следующее определение.

***<u>Определение</u>* 3**. Формальный оператор вида

$$X = \exp\left[\int \zeta(x, y, y', \ldots, y^{(k)})dx\right]\partial_y \tag{12}$$

называется ***нелокальным экспоненциальным оператором*** (ЭНО) ***в ультраканонической форме***. Можно показать, что координата формального оператора (12) в общем случае зависит от производной y любого сколь угодно высокого порядка.

Теорема 3. Пусть $z = z(x, y, \ldots, y^{(k)})$ — дифференциальный инвариант k-го порядка формального оператора (2). Тогда $z' = D_x[z]$ является дифференциальным инвариантом (k + 1)-го порядка.

Доказательство. Согласно определению 2, z удовлетворяет уравнению

$$\Phi\frac{\partial z}{\partial y} + D_x[\Phi]\frac{\partial z}{\partial y'} + \ldots + D_x^k[\Phi]\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} = 0.$$

Вычислим полную производную от обеих частей этого равенства, причем оно останется справедливым:

$$D_x\left\{\Phi\frac{\partial z}{\partial y} + D_x[\Phi]\frac{\partial z}{\partial y'} + \ldots + D_x^k[\Phi]\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}}\right\} = 0.$$

Раскроем это выражение, учитывая, что операторы D_x и d_x, а также D_x и d_y коммутируют, а при $i > 0$ верно соотношение $\left[D_x, \partial_{y^{(i)}}\right] = -\partial_{y^{(i-1)}}$. Получим

$$\Phi\frac{\partial z'}{\partial y} + D_x[\Phi]\frac{\partial z}{\partial y} + D_x[\Phi]\frac{\partial z'}{\partial y'} - D_x[\Phi]\frac{\partial z}{\partial y} + D_x^2[\Phi]\frac{\partial z}{\partial y'} + \ldots$$

$$\ldots + D_x^k[\Phi]\frac{\partial z'}{\partial y^{(k)}} - D_x^k[\Phi]\frac{\partial z}{\partial y^{(k-1)}} + D_x^{k+1}[\Phi]\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} = 0.$$

Все производные z, кроме последней, сокращаются, т. е.

$$\Phi\frac{\partial z'}{\partial y} + D_x[\Phi]\frac{\partial z'}{\partial y'} + \ldots + D_x^k[\Phi]\frac{\partial z'}{\partial y^{(k)}} + D_x^{k+1}[\Phi]\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} = 0.$$

По условию теоремы $z = z(x, y, \ldots, y^{(k)})$, поэтому

$$z' = D_x[z] = \frac{\partial z}{\partial x} + y'\frac{\partial z}{\partial y} + y''\frac{\partial z}{\partial y'} + \ldots + y^{(k+1)}\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}},$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}}=\frac{\partial z'}{\partial y^{(k+1)}},$$

так как $y^{(k+1)}$ входит в выражение для $D_x[z]$ линейно. Поэтому z' удовлетворяет уравнению, определяющему дифференциальный инвариант (k + 1)-го порядка.

Замечание. Из теоремы 3 следует, что дифференциальный инвариант любого высшего порядка может быть найден, исходя из дифференциального инварианта 1-го порядка, и при этом он будет линейно зависеть от старшей производной.

3. Теоремы о факторизации.

***Теорема* 4** [1, 2]. Произвольное дифференциальное уравнение n-го порядка (1), задающее гладкое многообразие, факторизуется до системы специального вида

$$\begin{cases} z^{(n-1)}=G(x,z,z',\ldots,z^{(n-2)}), \\ z=H(x,y,y'), \end{cases} \tag{13}$$

если и только если уравнение (1) допускает ЭНО

$$X=\exp\left(-\int\frac{H_y}{H_{y'}}dx\right)\partial_y. \tag{14}$$

Доказательство.

1. Пусть уравнение (1) допускает ЭНО (14). Запишем уравнение, которому удовлетворяет дифференциальный инвариант n-го порядка

$$\Phi\frac{\partial z_n}{\partial y}+D_x[\Phi]\frac{\partial z_n}{\partial y'}+\ldots+D_x^n[\Phi]\frac{\partial z_n}{\partial y^{(n)}}=0.$$

где $\Phi=\exp\left(-\int\frac{H_y}{H_{y'}}dx\right)$, и введем новую переменную $t=y^{(n)}-F(x,y,$ $y',\ldots y^{(n-1)})$. Получим

$$\Phi\frac{\partial z_n}{\partial y}+D_x[\Phi]\frac{\partial z_n}{\partial y'}+\ldots+D_x^{n-1}[\Phi]\frac{\partial z_n}{\partial y^{(n-1)}}-$$

$$-\frac{\partial z_n}{\partial t}\left\{\Phi\frac{\partial F}{\partial y}+D_x[\Phi]\frac{\partial F}{\partial y'}+\ldots+D_x^{n-1}[\Phi]\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}-D_x^n[\Phi]\right\}=0.$$

На многообразии [F] выражение в фигурных скобках равно нулю по определению допускаемого оператора, поэтому

$$\Phi\frac{\partial z_n}{\partial y}+D_x[\Phi]\frac{\partial z_n}{\partial y'}+\ldots+D_x^{n-1}[\Phi]\frac{\partial z_n}{\partial y^{(n-1)}}=0.$$

Согласно определению 2, интегральным базисом этого уравнения является набор всех младших инвариантов, т. е. $z_n=\overline{G}(x,t,z_1,z_2,\ldots z_{n-1})$, а так как рассматриваемое многообразие [F] задается теперь соотношением $t=0$, то

$$z_n = G(x, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}),$$

где $G(x, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}) = \overline{G}(x, 0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$. Заменив по теореме 3 $z_i = z^{(i-1)}$, $i = \overline{2, n}$, где $z = z_1 = H(x, y, y')$ — дифференциальный инвариант первого порядка, получим утверждение теоремы.

2. Пусть уравнение (1) может быть записано в виде системы (13). Учитывая, что $z = H(x, y, y')$ — дифференциальный инвариант первого порядка оператора (14), легко находим, что этот оператор допускается уравнением (1).

Замечание. Теорема 4 в иной формулировке приведена в книге П. Олвера [11]. Однако там сделан неверный вывод о том, что экспоненциальное векторное поле всегда приводит к понижению порядка уравнения.

Л е м м а . Размерность базиса инвариантов формального оператора (2), допускаемого уравнением (1), на n-мерном гладком многообразии (1) равна, $n - k + 1$ при условии, что $z = H(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$ является **младшим** дифференциальным инвариантом k-го порядка, причем компоненты базиса $\mathbf{z}$ могут быть выбраны таким образом, что $\mathbf{z} = (x, z_k, z'_k, \ldots, z_k^{(n-k-1)})$.

Доказательство. Инвариант $\mathbf{z}$ формального оператора (2) на многообразии (1) удовлетворяет уравнению

$$\Phi \frac{\partial z}{\partial y} + D_x[\Phi] \frac{\partial z}{\partial y'} + \ldots + D_x^n[\Phi] \frac{\partial z}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

Аналогично доказательству теоремы 4 вместо $y^{(n)}$ введем новую переменную $t = y^{(n)} - F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Тогда получим

$$\Phi \frac{\partial z}{\partial y} + D_x[\Phi] \frac{\partial z}{\partial y'} + \ldots + D_x^{n-1}[\Phi] \frac{\partial z}{\partial y^{(n-1)}} = 0. \tag{15}$$

Пусть $z_k = H(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$ является младшим инвариантом формального оператора (2) на многообразии (1). Следовательно, по теореме 3 $z_{k+s} = z_k^{(s)}$, $s = \overline{1, n-k-1}$, также являются инвариантами оператора (2) и удовлетворяют уравнению (15). Вместо $y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n-1)}$ введем новые переменные $p_i = z_r$, $r = \overline{k, n-1}$, а тогда уравнение (15) примет вид

$$\Phi \frac{\partial z}{\partial y} + D_x[\Phi] \frac{\partial z}{\partial y'} + \ldots + D_x^{k-1}[\Phi] \frac{\partial z}{\partial y^{(k-1)}} = 0. \tag{16}$$

Так как младший инвариант является дифференциальным инвариантом k-го порядка, то интегральный базис уравнения (16) содержит лишь один (допустимый) элемент x, а базис инвариантов формального оператора (2), на n-мерном гладком многообразии (1) имеет структуру $\mathbf{z} = (x, z_k, z'_k, \ldots, z_k^{(n-k-1)})$.

Замечание. Остальные элементы интегрального базиса уравнения (16) содержат производные более высокого порядка, чем k–1.

***Т е о р е м а* 5**. Произвольное дифференциальное уравнение n-го порядка (1), задающее гладкое многообразие, факторизуется до системы специального вида

$$\begin{cases} z^{(n-k)} = G(x, z, z', \ldots, z^{(n-k-1)}), \\ z = H(x, y, y', \ldots, y^{(k)}), \qquad \partial H / \partial y^{(k)} \neq 0, \end{cases} \tag{17}$$

если уравнение (1) допускает формальный оператор (2), для которого $z = H(x, y, y', \dots, y^{(k)})$ является **младшим** дифференциальным инвариантом на многообразии (2). Если уравнение (1) факторизуется до системы (17), то оно допускает некоторый формальный оператор (2), для которого $H(x, y, y', \dots,$ $\dots, y^{(k)})$ является дифференциальным инвариантом порядка k на многообразии (1).

Доказательство.

1. Достаточность доказывается совершенно аналогично теореме 4.

2. Докажем обратное утверждение. Построим формальный оператор, имеющий на многообразии (1) дифференциальный инвариант $z = H(x,y,y', \dots, y^{(k)})$.. Для этого нам необходимо решить линейное уравнение k-го порядка в полных производных

$$\Phi \frac{\partial z}{\partial y} + D_x[\Phi] \frac{\partial z}{\partial y'} + \ldots + D_x^k[\Phi] \frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} = 0.$$

относительно Ф. Это уравнение имеет k линейно независимых решений. На многообразии (1) количество таких решений может лишь только увеличиться. Все функции $z', \dots, z^{(n-k-1)}$ также будут инвариантами найденных операторов, как дифференциальные следствия инварианта z. А значит, уравнение (1) будет допускать любой из построенных формальных операторов (2).

Замечание. Условие, что $H(x, y, y', \dots, y^{(k)})$ является младшим инвариантом оператора (2) не является необходимым, так как уравнение (1) может записываться не через все инварианты допускаемого оператора.

4. Классические и неклассические редукции.

Очевидно, что утверждения теорем 4 и 5 обобщают все известные к настоящему времени способы понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на свойствах непрерывных симметрий. Иными словами, все результаты, полученные классическими методами, могут быть получены и применением теории формальных операторов. Однако это не означает, что следует отказаться от классических алгоритмов — трудоемкость поиска формальных операторов значительно выше, чем локальных (даже не точечных). Поэтому формальные операторы следует искать в случае, когда классические симметрии найдены, но не дают необходимой информации. Ниже рассматриваются примеры описания как классических симметрий (точечные операторы и первые интегралы), так и неклассических — с позиции формальных операторов.

1. Точечные симметрии. Оператор точечной симметрии в канонической форме

$$X = [\eta(x, y) - y'\xi(x, y)]\partial_y$$

эквивалентен оператору (12), в котором

$$\zeta = \frac{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y (y')^2 - \xi y''}{\eta - y'\xi}.$$

Вернемся к оператору (11). Выражение в квадратных скобках

$$-\frac{4(m+1)}{(m+3)^2}x^2+2Ax^{m+1}-(m+1)y^2+\frac{4(m+1)}{m+3}xy$$

можно, заменив первые два слагаемых в силу уравнения (10) на $2x(yy'-y)$, записать в виде

$$2xyy'-(m+1)y^2+\frac{4(m+1)}{m+3}xy$$

Если теперь вычесть из оператора (11) заведомо допускаемый (любым уравнением) оператор

$$2x\exp\left(\frac{1-m}{m+3}\int y^{-1}\,dx\right)D_{н},$$

то получим оператор в «геометрической» форме, который тоже допускается уравнением (10):

$$\widetilde{X}=\exp\left(\frac{1-m}{m+3}\int y^{-1}\,dx\right)\left\{2x\partial_{н}+\left[\ (m+1)y-\frac{2(m-1)}{m+3}x\right]\partial_y\right\}.$$

У этого оператора существует нетривиальный универсальный инвариант $I_0\neq x$, и подстановка его в качестве новой независимой переменной

$$y=zw^{\frac{m+1}{2}}+\frac{2}{m+3}w,\qquad x=w(z)$$

приводит уравнение (10) к уравнению Бернулли

$$\left(\frac{m+1}{2}z^2-A\right)\frac{dw}{dz}+zw+\frac{2}{m+3}w^{\frac{3-m}{2}}=0.$$

Таким образом, уравнение Абеля (10) проинтегрировано с помощью нелокального оператора (11) прямым методом, без повышения порядка.

Если исследуемое уравнение — второго порядка, то вторая производная заменяется через правую часть уравнения, и функция ξ имеет вид

$$\zeta=\frac{\eta_{н}+(\eta_y-\xi_{н}\ y'-\zeta_y\ (y')^2-\zeta F}{\eta-y'\zeta}.$$

Заметим, что определяемая оператором (12) симметрия локальна, если выражение ζdx представляет собой полный дифференциал. В частности, подынтегральное выражение в операторе (11) можно привести к форме полного дифференциала. Это следует из того, что уравнение (10), допускающее оператор (11), точечным преобразованием приводится к уравнению Бернулли, заведомо допускающему точечный оператор.

2. Первые интегралы. Симметрия, определяемая формальным оператором (2), является первым интегралом (законом сохранения), если система (17) имеет вид

$$\begin{cases} z' = 0, \\ z = H(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \end{cases} \tag{18}$$

Простая процедура позволяет найти и сопряженную лиеву симметрию (если она вариационная, т. е. нётерова). Рассмотрим следующий простой пример. Уравнение

$$y'' = Ay^m (y')^1 \tag{19}$$

имеет очевидный первый интеграл

$$P = \frac{1}{2-l}(y')^{2-l} - \frac{A}{m+1} y^{m+1} \tag{20}$$

Соответствующий ему оператор (12) запишется в виде

$$X = \exp\left(\int y^m (y')^{1-l} dx\right)\partial_y.$$

На многообразии решений исходного уравнения, используя (19), можно записать

$$X = \exp\left(\int \frac{y''}{y'} dx\right)\partial_y = y'\partial_y,$$

т. е. оказывается, что оператор, соответствующий первому интегралу (20), эквивалентен на многообразии оператору переноса ∂_x, который является вариационной симметрией уравнения (19).

3. Неклассические симметрии и уравнение Ермакова. Очевидно, если выражение ζdx не представляет собой полного дифференциала, то оператор (12) определяет, вообще говоря, нелокальную симметрию. В этом случае факторизация и, в конечном итоге, интегрирование уравнения не прогнозируется классическим алгоритмом С. Ли. Тем не менее, среди уравнений, обладающих подобной симметрией, есть уравнения, имеющие более чем 100-летнюю историю. Одним из них является уравнение Ермакова.

***Теорема* 6** [2]. Уравнение

$$y'' = f(x)y + g'(x)y^{-1} - [g(x)]y^{-3} \tag{21}$$

при произвольных функциях $f(x)$, $g(x)$ является единственным (с точностью до преобразования эквивалентности Куммера—Лиувилля) уравнением вида $y'' = F(x, y)$, допускающим ЭНО

$$X = \exp\left[\int \zeta(x, y)dx\right]\eta(x, y)\partial_y.$$

При этом оно факторизуется до системы

$$\begin{cases} z' + z^2 = f(x), \\ y' = z(x, C) + g(x)y^{-1}. \end{cases}$$

Доказательство. Второе продолжение оператора X имеет вид

$$\underset{2}{X} = \exp\left[\int \zeta(x, y)dx\right]\{\eta\partial_y + (\eta_x + \eta_y y' + \eta\zeta)\partial_{y'} +$$

$$+ \left[\eta_{xx} + 2\zeta\eta_x + \eta\zeta_x + \eta\zeta^2 + (2\eta_{xy} + 2\zeta\eta_y + \eta\zeta_y)y' + \eta_{yy}(y')^2 + \eta_y y''\right]\partial_{y''}\}.$$

Действуя им на уравнение $y'' = F(x, y)$ и заменяя везде y'' на $F(x, y)$, получим условие инвариантности в виде

$$\eta_{xx} + 2\zeta\eta_x + \eta\zeta_x + \eta\zeta^2 + (2\eta_{xy} + 2\zeta\eta_y + \eta\zeta_y)y' + \eta_{yy}(y')^2 + \eta_y F - \eta F_y = 0.$$

Расщепляя это равенство по степеням «независимой» переменной y', получаем систему трех уравнений для определения компонент η, ζ координаты канонического ЭНО:

$$\begin{cases} \eta_{yy} = 0, \\ 2\eta_{xy} + 2\zeta\eta_y + \eta\zeta_y = 0, \\ \eta_{xx} + 2\zeta\eta_x + \eta\zeta_x + \eta\zeta^2 + \eta_y F - \eta F_y = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует $\eta = a(x)y + b(x)$, из второго —

$$\zeta = -\frac{aa'y^2 + 2a'by + c(x)}{(ay+b)^2},$$

где $a(x), b(x), c(x)$ — произвольные функции. Третье уравнение можно рассматривать как линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка для неизвестной функции $F(x, y)$:

$$\frac{dF}{dy} - \frac{\eta_y}{\eta} = \frac{1}{\eta}(\eta_{xx} + 2\zeta\eta_x + \eta\zeta_x + \eta\zeta^2),$$

откуда (после подстановки значений η и ξ

$$F(x, y) = (ay+b)f(x) + \frac{[aa'' - 2(a')^2]b - (ab'' - 2a'b')a}{a^3} -$$

$$-\frac{[aa'' - 3(a')^2]b^2 + 2aa'bb' - (ac' - 2a'c)a}{2a^3(ay+b)} - \frac{(a'b^2 - ac)^2}{4a^3(ay+b)^3},$$

где $f(x)$ — также произвольная функция.

Вычислим дифференциальный инвариант оператора X:

$$u = \frac{y'}{ay+b} - \frac{a'b - ab'}{a^2(ay+b)} + \frac{a'b^2 - ac}{2a^2(ay+b)^2}.$$

Теперь, найдя du/dx, можно найти y'', а с учетом уже известного вида функции $F(x, y)$ — найти и факторизацию исходного уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} + au^2 + \dfrac{a'}{a}u = f, \\ (ay+b)\dfrac{dy}{dx} = (ay+b)^2 u + \dfrac{a'b - ab'}{a^2}(ay+b) - \dfrac{a'b^2 - ac}{2a^2}. \end{cases}$$

Известное преобразование эквивалентности $ay + b \to y$ с соответствующей заменой независимой переменной и переобозначениями дает

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} + u^2 = f(x), \\ \dfrac{dy}{dx} = uy + g(x)y^{-1}, \end{cases}$$

а исходное уравнение принимает вид (21). Теорема доказана.

Таким образом, первое уравнение системы оказывается уравнением Рикка-ти, и его можно решать независимо от второго, а второе — уравнением Бернулли, которое интегрируется в квадратурах при произвольном коэффициенте $z(x, C)$ — общем решении первого уравнения.

Следствие. Уравнение (21) является прямым обобщением **уравнения Ермакова**

$$y'' = f(x)y + Ay^{-3},$$

переходит в него при $g = \text{const}$ и обладает всеми его свойствами (кроме допускаемой 3-мерной алгебры Ли — при произвольных f и g уравнение (21) вообще не допускает никакой точечной группы, кроме тривиальной). Его общее решение

$$y = w\left[C_1 + 2\int \frac{g(x)dx}{w^2}\right]^{1/2},$$

где w — общее решение «укороченного», линейного уравнения $w'' = f(x)w$. Естественно, одна из трех произвольных констант, содержащихся в решении, не является независимой. Уравнение (21) допускает одномерную (!) точечную алгебру только (!) в случае

$$f = \frac{1}{2}\frac{g'''}{g'} + \frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{g''}{g} + \frac{k}{4}\left(\frac{g'}{g}\right)^2,$$

k — произвольная константа, трехмерная алгебра допускается **только** классическим уравнением Ермакова (т. е. при $g = \text{const}$).

Указанный механизм позволяет решить проблему, возникшую более 100 лет назад, — проблему построения аналогов уравнения Ермакова любого порядка. Большинство предыдущих попыток основывалось на свойствах допускаемой точечной 3-мерной алгебры Ли, вследствие чего поиск отталкивался от уравнения

$$y^{(n)} = Ay^{\frac{1+n}{1-n}},$$

допускающего, как и уравнение Ермакова, 3-мерную неразрешимую алгебру Ли, изоморфную $SL(2, \mathbf{R})$ и вариационную при четном n. Очевидно, поиск этот был заведомо обречен на неудачу, так как свойства уравнения Ермакова обусловлены исключительно нелокальной симметрией. Так, для уравнения 3-го порядка аналог уравнения Ермакова имеет вид

$$y''' + f(x)y' + g(x)y = (n+2)h(x)y^{n-1}y'' + (n-1)(n+1)hy^{n-2}(y')^2 +$$
$$+ [(2n+1)h' - 3nh^2y^{n-1}]y^{n-1}y' + (h'' + fh)y^n - 3hh'y^{2n-1} + h^3y^{3n-2}.$$

4. <u>Симметрии функционально-дифференциальных уравнений</u>. Универсальный принцип факторизации применим не только к обыкновенным дифференциальным уравнениям, но и к функционально-дифференциальным уравнениям, для которых до настоящего времени не известно никаких сколько-нибудь общих и эффективных методов поиска решений в аналитической форме. Элементы теории точечных и нелокальных операторов, допускаемых функционально-дифференциальными уравнениями, а также ряд важных практических результатов приведены в работах [3, 4, 5, 13].

5. Некоторые примеры.

***Пример* 1**. Уравнение

$$y'' + \left(3fy + 2g + \frac{h}{y}\right)y' + f^2y^3 + (f' + 2fg)y^2 + (g' + g^2 + 2fh - q)y + h' + 2gh + \frac{h^2}{y} = 0$$

допускает нелокальный оператор

$$X = y\exp\left[\int\left(\frac{h}{y} - fy\right)dx\right]\partial_y$$

и факторизуется до системы

$$\begin{cases} z' + z^2 = q(x), \\ y' + f(x)y^2 + [g(x) - z]y + h(x) = 0. \end{cases}$$

***Пример* 2**. Уравнение

$$y'' + (y')^2 + [2fy^2 + 2(f+g)y + g + 2h]y' +$$

$$+ f^2y^4 + 2fgy^3 + (2f' + g^2 + 2fh)y^2 + (g' + 2gh)y + h' + h^2 - q = 0$$

допускает нелокальный оператор

$$X = G(x)\exp\left[-2\int f(x)y\,dx\right]\partial_y, \qquad G(x) = \exp\left[-\int g(x)dx\right]$$

и факторизуется до системы

$$\begin{cases} z' + z^2 = q(x), \\ y' + f(x)y^2 + g(x)y + h(x) - z = 0. \end{cases}$$

***Пример* 3**. Уравнение

$$yy''' + (y'')^2 - y'y'' - F(x)y^2 = 0 \tag{22}$$

допускает **два** оператора

$$X_1 = y\partial_y, \qquad X_2 = \left(y\int y^{-2}dx\right)\partial_y. \tag{23}$$

Их координаты удовлетворяют уравнению в полных производных

$$yD_x^2[\Phi] - y''\Phi = 0.$$

Первый оператор (23) — X_1 — обычный точечный оператор растяжения (уравнение (22) — однородное), а второй оператор (X_2) — нелокальный, но не является ЭНО.

Уравнение (22) факторизуется до системы

$$\begin{cases} z' + z^2 = F(x), \\ y'' - yz = 0. \end{cases}$$

Покажем, что z является **младшим** дифференциальным инвариантом второго оператора (23). Вычислим первое продолжение оператора X_2 и попробуем найти дифференциальный инвариант, зависящий от первой производной. По определению 2, он удовлетворяет уравнению

$$\left(y\int y^{-2}dx\right)\frac{\partial I_1}{\partial y}+\left[y^{-1}+\left(y'\int y^{-2}dx\right)\right]\frac{\partial I_1}{\partial y'}=0. \tag{24}$$

Нелокальное выражение

$$\int y^{-2}dx$$

зависит от производных любого сколь угодно высокого порядка, поэтому может рассматриваться в качестве независимой переменной. Тогда уравнение (24) расщепляется до системы

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial I_1}{\partial y}+y'\dfrac{\partial I_1}{\partial y'}=0, \\ y^{-1}\dfrac{\partial I_1}{\partial y'}=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что $\partial I_1/\partial y'=0$.

Замечание. Ряд важных уравнений, частично приведенных в настоящей работе, был впервые получен решением обратной задачи (фиксируется класс операторов и затем находится класс уравнений, допускающий оператор заданного класса). Тем не менее, все примеры могут быть получены и применением регулярных алгоритмов решения прямых задач.

Сама по себе процедура вычисления канонической координаты не отличается от аналогичной для классических симметрий. Записав условие инвариантности, мы расщепляем его по степеням «независимых» переменных до переопределенной системы уравнений, из которой (при ее совместности) находятся функции η и ξ. Однако формальный оператор может быть записан в различных формах, и число форм значительно превосходит число форм точечных и касательных операторов. Поиск же его в наиболее общей форме приводит, как правило, к тривиальному результату [аналогично «пустому», оператору $\xi\partial_x+\xi F\partial_y$, допускаемому любым уравнением 1-го порядка $y'=F(x,y)$ при любой $\xi=\xi(x,y)$]. Поэтому наряду с прямыми весьма важными оказываются обратные задачи, решения которых дают описание классов обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих операторы заданной формы (необходимое условие). Именно так и было получено решение проблемы уравнения Ермакова. Следует также заметить, что наличие нелокальной переменной, входящей в каноническую координату множителем, а не экспонентой, приводит к тому, что в определяющем уравнении появляется ещё одна «независимая» переменная —

$$I=\int\zeta(x,y,\ldots)dx.$$

Можно поставить вопрос о том, как вообще может входить нелокальная переменная I в координату канонического оператора. Если искать оператор с координатой

$$\Phi=\eta(xy)F(I),$$

то оказывается, что нетривиальный оператор может существовать, если функции $F, F', F'', \ldots$ либо линейно-зависимы, либо — нули, начиная с F''. В противном случае система оказывается слишком переопределенной, так как все величины $F, F', F'', \ldots$ — «независимые» переменные. Поэтому простейшие возможные классы нелокальных операторов исчерпываются двумя типами:

$$X = \left[\eta_1 \exp\left(\int \zeta dx\right) + \eta_2\right]\partial_y$$

и

$$X = \left(\eta_1 \int \zeta dx + \eta_2\right)\partial_y,$$

а множественность видов возникает из-за существенной разницы в реализации алгоритма поиска при выборе соответственно ультраканонической, канонической или «геометрической» форм оператора.

Заметим также, что рассматриваемые в работе формальные операторы в интегральной форме являются частными случаями преобразований Ли—Беклунда [7] — всякий интеграл можно разложить в формальный ряд, но не всякий формальный ряд можно «свернуть» в интеграл. Вместе с тем легко показать, что для уравнений 2-го порядка поиск допускаемых операторов в форме ЭНО оказывается **достаточным**, если наложить естественное требование представимости инвариантов оператора в замкнутой форме. В противном случае само уравнение будет содержать бесконечный ряд, тогда как обычно предполагается, что функция $F(x, y, y')$ — правая часть уравнения — задана в аналитической замкнутой форме. Пусть $I_0 = x,\ I_1 = z(x, y, y')$ — инварианты искомого допускаемого оператора. Согласно классическим теоремам группового анализа, уравнение 2-го порядка, допускающее некоторый оператор, представимо в форме $\Psi(x, z, z') = 0$. Из определения дифференциального инварианта 1-го порядка

$$\Phi \frac{\partial z}{\partial y} + D_x[\Phi] \frac{\partial z}{\partial y'} = 0$$

однозначно следует вид производящей функции симметрии Φ

$$\Phi = \exp\left(\int \frac{z_y}{z_{y'}} dx\right),$$

т.е. допускаемый оператор должен иметь форму ЭНО.

В заключение отметим, что форму ЭНО (где роль интегралов играют обращения полных частных производных функций многих переменных) имеют и операторы, соответствующие «неклассическим» симметриям нелинейных уравнений в частных производных. Обширный список литературы по этому вопросу приведен в работе [14].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Зайцев В. Ф.* Нелокальные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений // Моделирование процессов управления и обработки информации. М., 1994. С. 190–199.

2. *Зайцев В. Ф.* О современном групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды II Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их применения». СПб., 1998. С.137–151.

3. *Зайцев В. Ф., Линчук Л. В.* О групповом анализе обобщенных дифференциальных уравнений // Тезисы докл. II Международной конференции «Средства математического моделирования». СПб., 1999. С. 177–178.

4. *Зайцев В. Ф., Линчук Л. В.* Об алгоритме группового анализа обобщенных дифференциальных уравнений // Тезисы докл. II Международной конференции «Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях и образовании». Минск, 1999. С. 51.

5. *Зайцев В. Ф., Линчук Л. В.* О факторизации обобщенных дифференциальных уравнений // Труды IX Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ–2000). Орел, 2000. С. 222–226.

6. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.

7. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М., 1983.

8. *Ибрагимов Н. Х.* Азбука группового анализа. Сер. «Математика и кибернетика». М., 1989. № 8.

9. *Ибрагимов Н. Х.* Опыт группового анализа. Сер. «Математика и кибернетика». М., 1991. № 7.

10. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.

11. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989.

12. *Ibragimov N. H.* Introduction to modern group analysis. Ufa, 2000.

13. *Linchuk L. V.* Symmetry analysis of functional-differential equations // Math. Research. Vol. 6. «Theory and practice of differential equations». St. Petersburg, 2000. P. 111–117.

14. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of nonlinear partial differential equations. Chapman & Hall / CRC, 2004.

15. *Zaitsev V. F.* Universal description of symmetries on a basis of the formal operators // Math. Research. Vol.7. Theory and practice of differential equations. St.Petersburg, 2000. P. 39–45.

V. Zaitsev

SYMMETRIES OF DIFFERENTIAL EQUATIONS. FORMAL OPERATORS

The paper is devoted to some aspects of the theory of formal operators. We introduce definitions, properties of formal operators and prove factorizations theorems. These theorems generalize well known methods of reduction and integration of ordinary differential equations admitting local operators. Therefore, we can construct universal description of all «symmetric» equations.