М. В. Шабанова

ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Автор показывает, что интенсивный подход к модернизации содержания математического образования состоит в создании условий иерархизации его системы. Результатом этого процесса является выделение метасистемы, состоящей из знаний о методологии учебно-познавательной деятельности. Доказывается, что ведущей функцией этой метасистемы является управление процессом развития остальных компонентов содержания математического образования. Уделяется особое внимание описанию положений концепции проектирования методологической составляющей содержания общего математического образования и их реализации на следующих уровнях: теоретической модели, предметном и технологическом.

Переход к постиндустриальной стадии общественного развития, характеризуемый повышением общественной значимости научной информации (в том числе и математической) и существенным превышением ее скорости над скоростью смены поколений, привел к невозможности дальнейшей модернизации содержания математического образования только за счет реализации экстенсивного подхода. Хотя нельзя сказать, что он полностью утратил свое значение. Свидетельством этого является, например, включение в содержание общего математического образования элементов теории вероятностей и математической статистики.

Научные поиски интенсивного подхода привели к осознанию необходимости *отражения в содержании образования процессуально-технологической стороны обучения* (В. В. Давыдов, З. А. Решетова, Л. М. Перминова и др.).

Характеризуя изменения, произошедшие в связи с этими поисками во взглядах ученых на взаимодействие содержательной и процессуальной сторон обучения, С. А. Шапоринский пишет: «Конечно, и прежде прогрессивная дидактика стремилась приобщить учеников и к процессу научного познания как средству развития учащихся, сейчас вопрос стоит по-другому, а именно: в какой мере усвоение современного научного знания вообще возможно без усвоения средств и способов его получения»[1].

С точки зрения дидактического подхода к проектированию содержания образования, развиваемого в трудах В. В. Краевского, И. Я. Лернера, М. Н. Скаткина и др., процесс обучения может быть направлен на изменение таких личностных подструктур, как научные знания, опыт репродуктивной деятельности, опыт творчества и опыт эмоционально-ценностных отношений. Эти элементы содержания образования связаны не только функционально, но и генетически («Предшествующие элементы могут существовать отдельно от последующих, хотя каждый последующий невозможен без предшествующих»[2]). Вместе с тем эти элементы обладают и определенной степенью свободы, что доказано исследованиями Л. Я. Зориной, классифицирующей все учебные предметы по признаку «ведущего компонента в содержании образования»[3]. По этой классификации математика характеризуется ею как биполярный предмет, ориентированный на формирование двух компонентов: научных математических знаний и опыта репродуктив-

ной деятельности (специальных умений и навыков).

Представления о четырехэлементном составе содержания образования были порождены «линейно-этапным» описанием организации деятельности. Современные точки зрения («структурно-уровневые»), развиваемые в трудах И. Н. Семенова, С. Ю. Степанова и др., связаны с выделением в деятельности двух иерархических уровней: «регулируемого» и «регулирующего». Причем, «регулируемый» уровень «образуется предметным и операциональным компонентами», а «регулирующий» представлен «четырьмя видами рефлексии: интеллектуальной, личностной, коммуникативной и кооперативной»[4]. Исследования Л. М. Перминовой[5] показывают, что рефлексивный анализ учебно-познавательного процесса способен внести определенный вклад в содержание образования. Его результатом могут стать знания о познавательной деятельности, знания учащегося о самом себе, знания о связях человека с внешним миром («я в изменяющемся мире» и «мир, изменяющийся во мне»).

Эти научные данные привели нас к выводу, что при определенных условиях (ведущим из которых является рефлексия у учащихся, связанная с процессуально-технологической стороной обучения), в содержании образования могут произойти изменения, характеризуемые как *иерархизация внутренней структуры содержания образования.* Привлечение средств системного анализа к изучению данного вопроса позволило раскрыть суть этого процесса. Она состоит в осознании («выявлении») учащимися фоновых компонентов, входящих в состав элементов основной структуры содержания образования и их интеграции в новый элемент (метасистему). Результатом этого процесса является приобретение учащимися способности к самообразованию. По мнению многих ученых-методистов (Г. И. Саранцева, Б. В. Гнеденко, Ю. Ф. Фоминых, А. Л. Жохова, Т. А. Ивановой и др.), регулирующую метасистему содержания математического образования образуют знания о методологии математической деятельности. Это позволяет нам говорить о существовании методологической составляющей (МС) содержания математического образования.

Постоянные заботы ученых об отражении процессом обучения математике специфики научного математического познания привели к широкому использованию в методической науке элементов методологии математики в качестве методов и средств обучения. Так, например, принципы расширения алгебраических систем вместе с историко-научными данными о практических потребностях развития числовых представлений используются авторами большинства учебных пособий в качестве основы, определяющей логику развертывания линии числа в школьном курсе математики.

В качестве средств и методов обучения математике методологические знания выполняют целый ряд *образовательных функций*: формирующую, регулирующую и интегрирующую. Примером реализации их формирующих функций является использование Н. И. Зильбербергом[6] принципов расширения алгебраических систем в качестве объяснительной основы введения понятия степени числа с рациональным показателем. Пример реализации их регулирующей функции — применение эвристических схем в качестве основы разработки учителем системы наводящих вопросов или серий задач. Интегрирующая функция методологических знаний реализуется, например, при определении

логики изложения учебного материала. Так, П. М. Эрдниев и Б. П. Эрдниев[7] широко используют изоморфные связи линейной и векторной алгебры в качестве средств укрупнения дидактических единиц.

Вместе с тем в учебной и методической литературе существует немало примеров существования у учащихся искаженных представлений о методологии математического познания, сформированных под влиянием методических средств. Так, А. В. Гладкий[8] отмечает, что большинство выпускников школ относятся к усвоенному еще с начальной школы запрету «делить на ноль нельзя» как к табу, не подлежащему обсуждению и рациональному объяснению. Причина такого отношения объясняется отсутствием в ряде учебных пособий по математике для начальной школы и учащихся 5-6 классов материалов, посвященных обсуждению смысла данного запрета, а также в его систематическом использовании в качестве нормы учебной деятельности (при проверке результатов вычислений, нахождении ОДЗ и т. п.) без обращения к содержательному смыслу.

Это показывает, что формирование методологических знаний в процессе обучения математике требует решения двуединой задачи — *проектирования МС математического образования и приведения в соответствие с ее содержанием методов изложения предметной составляющей (ПС)*.

С точки зрения дидактического подхода, проектирование МС математического образования должно начинаться с развития теоретических представлений о ее составе, функциях и связях с ПС. Используя в качестве опоры модель содержания образования И. Я. Лернера[9], мы получаем следующий наглядный образ методологической составляющей содержания математического образования, представленный на рис. 1.

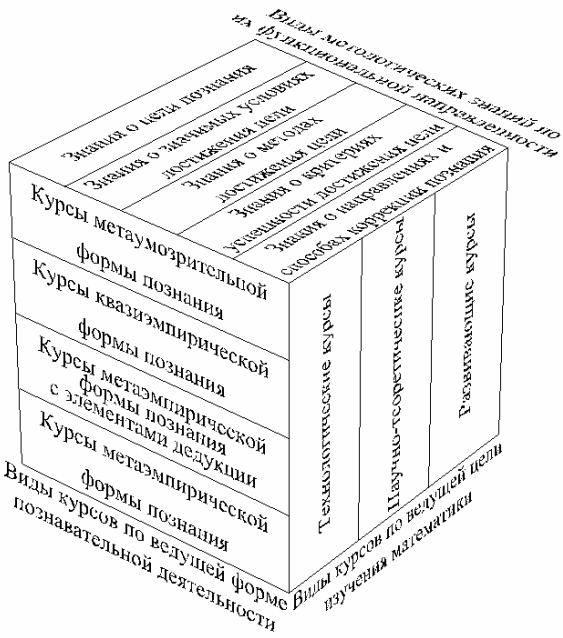

Рис. 1. Методологическая составляющая математического образования

Как элемент содержания математического образования, регулирующий его развитие, МС должна представлять собой отражение функциональной структуры системы саморегуляции деятельности. Исследования О. А. Конопкина[10] и его учеников в области саморегуляции позволяют утверждать, что МС содержания математического образования должна включать следующие функциональные блоки методологических знаний:

- *знания о цели учебно-познавательной математической деятельности;*
- *знания о значимых условиях ее достижения;*
- *знания о методах и средствах достижения этой цели;*
- *знания о критериях успешности деятельности;*
- *знания об условиях, направлениях и способах коррекции деятельности.*

Содержательное наполнение этих блоков знаний должно осуществляться с учетом целевой направленности и формы математической деятельности, формируемой в учебном процессе. Историко-научные, методологические и методические исследования (В. Э. Войцеховича, Б. В. Гнеденко, А. А. Столяра, О. Ф. Теребилова и др.) свидетельствуют о возможности разделения гносеологического цикла в математике на три относительно самостоятельных вида математической деятельности: математическое творчество, обоснование и систематизация его результатов, применение положений математической теории (математическое пользование). Процесс обучения математике направлен на формирование готовности учащихся к осуществлению всех трех видов математической деятельности. Однако акценты в нем (в зависимости от методического подхода) могут быть расставлены поразному. Так, например, реализация положений теорий обогащающего обучения в программах и учебниках авторского коллектива под руководством Э. Г. Гельфман выводит на первый план задачу формирования готовности учащихся к математическому творчеству. Изложение школьного курса геометрии на аксиоматической основе А. В. Погореловым способствует преимущественному развитию готовности учащихся к деятельности логического обоснования теоретических положений. Школьный курс алгебры традиционно ориентирован на формирование умений применять теоретические положения к решению задач. Выделенные виды математической деятельности обеспечиваются существенно различными методологическими нормами. Так, например, если для математического творчества характерно широкое использование методов эмпирического познания (наблюдений, опытов, экспериментов), то применение их к обоснованию справедливости утверждений в математике считается недопустимым. Если для деятельности математического творчества и обоснования допустима идея потенциальной осуществимости, то для математического пользования ее применение в ряде случаев оказывается невозможным.

Еще одним фактором, определяющим отбор методологических знаний, как показывает рис. 1, является форма учебно-познавательной математической деятельности, в которой происходит развитие ПС математического образования. Исследования И. Лакатоса, В. Э. Войцеховича и др. позволяют выделить четыре основные формы научного познания в математике (и, соответственно им, учебного познания): метаэмпирическое познание (развитие математических знаний в связи с практическими потребностями, отражение в них свойств чувственно воспринимаемой реальности, обоснование истинности положений опытным путем), метаэмпирическое познание с элементами дедукции (развитие математических знаний как в связи с практическими, так и в связи с теоретическими потребностями, логическое обоснование результатов метаэмпирического познания на основе локальной аксиоматизации), квазиэмпирическое познание (обобщение одних содержательных аксиоматических математических теорий другими), метаумозрительное познание (построение абстрактных математических теорий, использование метода содержательной интерпретации в качестве основы обоснования их истинности). Возрастная периодизация развития мышления учащихся определяет последовательную смену этих форм и составляющих их методологических зна-

ний при обучении математике в школе и вузе. Эти изменения проявляются в выборе предметного содержания, доступного пониманию учащихся, в степени и способах его раскрытия, в выборе методов обоснования справедливости математических утверждений и в характере требований к уровню строгости математической деятельности, предъявляемых учащимся.

Данная теоретическая модель является основой проектирования МС математического образования как на предметном, так и на технологическом уровне. Ее реализация на уровне учебного предмета состоит в *«опредмечивании»* МС материальными носителями — *элементами содержания учебного предмета.* Содержание предмета математики традиционно описывается через характеристику системы научных знаний (понятий, утверждений), которыми должен был овладеть учащийся, а также через описание умений в осуществлении специальных действий, которые должны быть сформированы на их основе. Решение проблемы фиксации МС обучения математике требует реализации тех возможностей, которые предоставляются описанием его ПС в контексте организуемой или формируемой учебно-познавательной деятельности.

Проиллюстрируем это положение примером характеристики содержания темы «Векторы», излагаемой в контексте деятельности систематизации и обоснования представлений о векторных величинах, полученных при изучении курса физики.

«*Формирование представлений о существовании математических величин, отличных от скалярных,* через ознакомление учащихся с понятием вектора. *Формирование представлений о модельной природе математических величин* через демонстрацию *процесса происхождения* понятия вектора на основе *обобщения* и *абстрагирования* характеристик известных учащимся физических величин (скорости, силы и др.). Изучение понятия вектора на основе *сравнения характеристик векторных и скалярных геометрических величин*, *установление общего и особенного* в осуществлении операций над величинами этих видов и в характерах, устанавливаемых на их множествах отношений. *Формирование представлений о практической и научной значимости математических знаний* через ознакомление с некоторыми физическими и геометрическими *приложениями* векторного аппарата, а также *формирование способности к применению векторного метода* на уровне самостоятельного *выбора программ* осуществления элементарных действий над векторами (определение абсолютной величины, координат, осуществление операций над векторами) в *зависимости от характера данных*, *определяемых контекстом задач*» (МС темы выделена в представленном описании курсивом).

При таком подходе к построению учебных программ предметные знания и способы деятельности, входящие в содержание темы, выступают в качестве средств достижения более общих мировоззренческих и прагматических целей (формирование представлений, опыта, способности к осуществлению деятельности определенного вида на определенном уровне ее саморегуляции). Методологические знания — в качестве связующего (интегрирующего) звена, направляющего развитие предметных знаний и специальных умений.

Наглядные представления о сущности этих изменений можно получить из сопоставления модели учебного предмета (математика), предлагаемой Л. Я. Зориной[11] (рис. 2) и ее модификации, представленной на рис. 3.

Дополнение модели учебного предмета «Математика» системой методологических знаний (на рис. 3 — «Блок управления взаимодействием»), а также введение параметра времени для отне-

сения научных знаний или способов деятельности к ведущему или процессуальному блоку (на схеме 3 он показан стрелкой) позволит, по нашему мнению, решить проблему биполярности математических курсов, установив между ведущими компонентами содержания математического образования диалектическое взаимодействие. Следует отметить, что эти дополнения существенным образом меняют представления о сущности «*ведущего» компонента содержания образования*. Из целевого компонента он превращается в компонент, который не только соответствует основной цели курса, но и *«ведет за собой» развитие* комплекса всех остальных компонентов содержания образования.

На технологическом уровне эти изменения найдут выражение в выделении «сюжетного» плана развертывания содержания математического образования и интеграции на этой основе теоретического и задачного материала. Рассмотрим в качестве примера фрагмент учебного текста, посвященного введению понятия вектора:

Рис. 2. Модель структуры учебного предмета с ведущим компонентом «научные знания» («способы деятельности») по Л. Я. Зориной

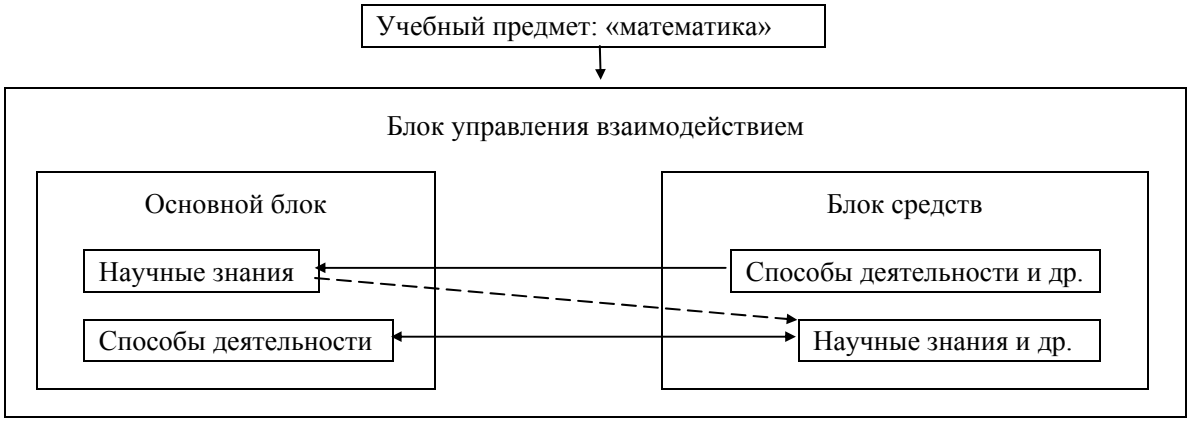

Рис. 3. Модель структуры предмета «Математика» с ведущим компонентом «методологические знания»

«Одной из важных задач геометрии является развитие знаний о величинах и их измерении. Вы уже знакомы с такими геометрическими величинами, как длина отрезка (расстояние между двумя точками), градусная мера угла и площадь. Все эти величины обладают одним очень важным свойством — между результатами измерения любых двух величин (одной системой мер) можно установить отношение равенства, больше или меньше. Это свойство позволяет использовать в качестве арифметической модели всех этих величин число, а в качестве их геометрической модели — точки координатной прямой. Именно поэтому все величины, обладающие указанным свойством, называются ***скалярными***, что в переводе с латинского означает «шкала». Таким образом, длина отрезка, площадь простой плоской фигуры и градусная мера угла — это скалярные геометрические величины. Слово «геометрические» говорит о том, что эти скалярные величины являются характеристиками геометрических фигур и изучаются в геометрии. Конечно, сразу возникает вопрос: а существуют ли скалярные не геометрические величины? А также: существуют ли не скалярные величины? Попытайтесь на эти вопросы ответить сами.

Математики занимаются тем, что разрабатывают и исследуют математические модели различных объектов и процессов, изучаемых в других науках. И если им удалось придумать математические (арифметические и геометрические) модели для скалярных величин, то в математике должны существовать и модели тех величин, которые не являются скалярными. Выясним, какую математическую модель имеют не скалярные величины, характеризующиеся числом и направлением. В науке они получили название ***векторных*** величин. В переводе с латинского «вектор» означает «переноситель». Приведите известные вам примеры векторных величин. С помощью этих примеров объясните, почему их стали называть «переносителями». При решении сюжетных задач в курсе алгебры с некоторыми векторными величинами вы уже имели дело: находили их значение, складывали, вычитали и т. п.; и во всех этих случаях пользовались какими-то их математическими моделями. Обратимся вновь к этим задачам, чтобы вспомнить, что это были за модели.

З а д а ч а 1. Катер движется вверх по реке со скоростью 35 км/ч. За какое время он преодолеет расстояние в 20 км, если скорость течения реки 3 км/ч? Какое расстояние пройдет катер вниз по реке за это же время?

З а д а ч а 2. В бассейн проведены две трубы: подающая и отводящая. Производительность какой трубы и на сколько больше, если при заполненном наполовину бассейне открыли обе трубы и а) через 2 часа он оказался пуст; б) через 0,5 часа он оказался полон; в) уровень воды в бассейне все время оставался неизменным?

О каких векторных величинах идет речь в этих задачах? Как на арифметическом (геометрическом) языке выражаются противоположные и одинаковые направления этих величин? С какой целью в решении этих задач используется арифметическая (геометрическая) модель векторной величины?

Геометрическую модель векторной величины принято называть вектором. Таким образом, ***вектор*** — это направленный отрезок плоскости или пространства. Он обозначается $\overrightarrow{AB}$, А и В — обозначения концов этого отрезка, а стрелка указывает, какой из этих концов считать первым (началом вектора), а какой — вторым (концом вектора). Длина отрезка является изображением числовой характеристики векторной величины и называется модулем вектора (обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$). Положение отрезка на плоскости (в пространстве) с указанием его начала и конца — изображением направления векторной величины».

Приведенный пример показывает, что сюжетную линию учебного текста образуют сведения методологического характера. В данном случае такими сведениями являются: информация о свойствах и видах предметных величин и их математических моделях, об этимологии вводимых математических терминов, о ро-ли смежных наук в развитии математики.

Следует заметить, что, несмотря на присутствие в этом тексте информации методологического характера, ведущая его функция состоит в передаче предметных знаний (введение понятия век-

тора). Методологические сведения играют здесь вспомогательную роль, то есть выступают средствами: интеграции ранее полученных знаний с новыми, мотивации введения нового понятия и формирования верных представлений о его идейной сущности. Это учебные тексты с усиленной методологической составляющей. В развитии методологических знаний они играют весьма ограниченную роль — являются одним из средств передачи методологических знаний.

Исследования Л. Б. Султановой[12] показывают, что в своем развитии методологические знания проходят четыре основных этапа: зарождение в опыте математического познания (в результате инсайда, или восприятия образца деятельности), распространение в опыте математического познания (в форме его традиций), выявление (осознание в результате рефлексии этого опыта) и опредмечивание (в ходе дальнейшего изучения результатов рефлексии). Моделирование в учебном процессе последних двух этапов развития методологических знаний требует организации методологически ориентированного обучения математике[13], характеризуемого переносом акцентов с изучения предметного содержания на изучение методологических средств учебного математического познания (методов решения отдельных видов задач, особенностей связи математики с реальностью и другими науками, оснований математики и т. п.). Местом организации методологически ориентированного обучения могут стать элективные курсы по математике и уроки обобщающего повторения.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Шапоринский С. А.* Обучение и научное познание М., 1981. С. 20.

[2] Теоретические основы содержания общего среднего образования / Под ред. В. В. Краевского, И. Я. Лернера. М., 1983. С. 102.

[3] *Зорина Л. Я.* Дидактические аспекты естественнонаучного образования: Монография. М., 1993.

[4] *Семенов И. Н., Степанов С. Ю.* Рефлексивная психология и педагогика творческого мышления. Запорожье, 1992.

[5] *Перминова Л. М.* Теоретические основы конструирования содержания школьного образования: Дис. … д-ра пед. наук. М., 1995. С. 215.

[6] *Зильберберг Н. И.* Алгебра 9: для углубленного изучения математики. Псков. С. 146–148.

[7] *Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П.* Обучение математике в школе. Укрупнение дидактических единиц: Книга для учителя. 2-е изд. М., 1996. С. 280–284.

[8] *Гладкий А. В.* Об уровне математической культуры выпускников средней школы // Математика в школе. 1990. № 4. С. 7–9.

[9] Теоретические основы содержания общего среднего образования / Под ред. В. В. Краевского, И. Я. Лернера. М., 1983. С. 152.

[10] *Конопкин О. А.* Психологические механизмы регуляции деятельности. М., 1980.

[11] *Зорина Л. Я.* Основания для отбора и распределения основных и вспомогательных знаний в различных циклах учебных предметов // Теоретические основы содержания общего среднего образования / Под ред. В. В. Краевского, И. Я. Лернера. М., 1992. С. 211–224.

[12] *Султанова Л. Б.* Неформальная рационализация в математике. Уфа, 2001.

[13] *Шабанова М., Котова С.* Уравнения и неравенства с параметрами // Математика. 2002. № 38. С. 27–32.

M. Shabanova

THE METHODOLOGICAL COMPONENT OF MATHEMATICAL EDUCATION AND ITS PROJECTING

An intensive approach to modernization of the content of mathematical education is regarded. A metasystem comprising the knowledge of methodology of the research work is proposed, the main function of the metasystem being management of the process of the development of other components of mathematical education. A conception of projecting the methodological component of general education in mathematics on the levels of a theoretical model, subject and technology of teaching is described.