О. А. Сотникова

ЦЕЛОСТНОСТЬ КАК ВЕДУЩИЙ ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ (РЕАЛИЗАЦИИ) КУРСА АЛГЕБРЫ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ (В РАМКАХ ГЕРМЕНЕВТИЧЕСКОГО ПОДХОДА)

Обсуждается проблема понимания при обучении алгебре в педагогическом вузе. Предлагается методика обучения алгебре, исходным основанием которой является взаимозависимость понятий понимания и целостности. Выявлены содержательные связи в материале курса алгебры как связи целостного образования. Определена специфика учебных действий, выполнение которых способствует их раскрытию. Сформулирована концепция раскрытия содержательных связей в курсе алгебры и методические аспекты ее реализации.

В последние годы в психолого-педагогических исследованиях активно разрабатывается герменевтический подход к вузовскому обучению, в котором основной целью признается понимание материала студентами. Причем речь идет о «культурном» понимании (термин В. П. Зинченко), ориентированном

на смысл изучаемой предметной области, на раскрытие контекста учебного материала.

Способы достижения продуктивной предметной подготовки будущих учителей математики в педагогическом вузе разрабатывались А. Г. Мордковичем, В. Т. Петровой, М. В. Потоцким, Е. И. Смирновым, Г. Г. Хамовым, А. В. Ястребовым и др. В исследованиях авторы подчеркивали, что понимание материала студентами — залог успеха профессионального становления учителя математики, готовности к методической реализации современных парадигм обучения в будущей профессиональной деятельности. Усвоение только форм математических знаний (определений, теорем и т. д.), их отдельных фрагментов не обеспечивает необходимой предметной подготовки учителя математики. Такие «знания» могут быть при определенных условиях воспроизведены студентом, но не построены в новых условиях. Только «понимающий» студент обладает устойчивыми знаниями, готовыми не просто к воспроизведению, но к продуктивному воспроизводству («построению заново»), конструированию. Для учителя математики это профессионально значимо, поскольку его будущая деятельность непосредственно связана с организацией учебной деятельности школьников по усвоению математических знаний.

Постановка цели обучения, ориентированной на понимание, сама по себе еще не решает методической проблемы построения математического курса. Особенно если его материал высоко абстрактен, не допускает наглядно-образного представления, «житейского» толкования, близок к формальной логике. Таким курсом в педагогическом вузе является курс алгебры. Поэтому его изучение сопряжено с большими трудностями в понимании, в достижении цели обучения в предметной подготовке учителя математики.

Понятие понимания является многоаспектным понятием различных областей знания. Для решения проблемы поиска методических составляющих реализации герменевтического подхода к обучению алгебре в педагогическом вузе необходимо определить исходное основание понятия понимания.

Методологическая трактовка понимания определяется *взаимосвязями в знании*: понимание как процесс характеризуется установлением взаимосвязей, составляющих знание, а как результат — видением этих взаимосвязей (Н. С. Автономова, А. В. Ахутин, В. А. Лекторский, К. В. Малиновская, А. Л. Никифоров, В. В. Розанов, Г. И. Рузавин, В. С. Черняк и др.). С психологических позиций работа понимания характеризуется двунаправленным движением *мысли* между смыслом и значением понятий (В. П. Зинченко, Л. М. Веккер и др.), при котором *строится* концепт понятия (А. А. Брудный, М. Вертгеймер и др.). Психологи отмечают личностность акта понимания (В. П. Зинченко, В. В. Знаков, М. К. Мамардашвили и др.).

Следовательно, в понимании существенное значение имеет установление *самим* субъектом познания таких взаимосвязей, которые «соединяют» (предметное) значение (математических) понятий и их смысл. Значит, и уровень (качество) понимания определяется тем, насколько глубинно устанавливаются связи в изучаемом материале субъектом познания и что в результате этой работы образуется. Если установленные связи характеризуют только какую-то одну сторону знания (фактологичность, вид отношений знаний, специфику только части знания и т. д.), то они не обеспечивают глубокого понимания. Такие

знания однобоки, поверхностны, фрагментарны, а порой просто формальны. Они не гарантируют студенту продуктивность в учебной и будущей профессиональной деятельности в современных условиях. Необходимо установление студентом связей, лежащих в основе различных видов деятельности, конструирующих знания. Какие это связи и сколько их должно быть установлено, чтобы понимание было достигнуто?

Е. И. Лященко подчеркивает важность тех связей, «которые создают возможность для обретения учащимися смысла изучаемых положений»[1]. Данная позиция обобщена для изучения школьной математики, которая содержательна по своей сущности. Для вузовской математики требует уточнения специфика связей, установление которых способствует пониманию.

Связи в материале могут носить различный характер (формальный, логический, процессуальный и др.). Связи, вскрывающие сущность знания, его основания, истоки и перспективы развития, мы называем *содержательными связями*. Если в знаниях имеется общее основание, то его части образуют единство. В философии познания это характеризуется *целостностью*.

Целостность — внутреннее единство объекта, его относительная автономность, независимость от окружающего. Следовательно, она (целостность) составляется частями объекта и отношениями между ними, обеспечивающими единство. Единение частей не может быть механическим (тогда нет «внутреннего единства объекта»), оно должно иметь некую основу, цементирующую их в целостное образование. Этим объединяющим стержнем может выступать идея, метод, принцип, понятие и т. д. Целостность предметна и выступает как «неделимая структура»[2]. В методологии познания отмечается, что понятие целостности выполняет обобщающую функцию в познании, задает ориентир познавательному процессу. Понимание направлено от целого к частям и обратно, причем начало этого движения требует сосредоточения на целом (Г. Х. Гадамер, И. В. Блауберг, Э. Г. Юдин и др.).

Таким образом, целостность и понимание с методологических позиций — два взаимозависимых понятия. *При разработке методической системы обучения, нацеленного на понимание, в качестве генеральной идеи целесообразно избрать идею* ***целостности***. Поэтому для понимания важно раскрывать в учебном материале содержательные связи, характеризующие целостность материала, его причастность к общему в конкретной разновидности. Целостность в обучении с методологических позиций выступает в роли цели и средства обучения. Исходя из этого, реализация герменевтического подхода к обучению связана с приданием учебному материалу свойства целостности и с организацией деятельности студентов по раскрытию целостности.

Понятие целостности играет существенную роль в тех случаях, когда изучается сложный объект, то есть объект, состоящий из различных частей, но имеющий объединяющую основу. Именно таким объектом является курс алгебры. Анализ предметного содержания алгебраического курса, определенного государственными образовательными стандартами и учебными программами различных вузов, позволяет характеризовать предметное содержание курса алгебры как совокупность математических теорий, имеющих единое устройство и единые идеи, определяющие это устройство. Каждая математическая теория, изучаемая в курсе алгебры, имеет три следующих компонента понятия

алгебраической структуры, рассматриваемые на обобщенном уровне.

1. Понятия: множество; отношение равенства элементов множества; алгебраическая операция (действие) на множестве; отношение на множестве. В этом компоненте понятия алгебраической структуры содержательные связи базируются на идее *координатизации* (термин Г. Вейля), то есть идее приписывания объектам «числоподобных» понятий (И. Р. Шафаревич).

2. Структурные свойства алгебраических операций (отношений) на множестве, то есть свойства, определяющие принадлежность изучаемой теории к алгебраической структуре. Содержательные связи данного компонента «описывают» свойства множеств с алгебраическими операциями на нем с помощью алгебраической символики. Иначе говоря, основная идея материала, представленного компонентом структурных свойств, есть идея «символизации».

3. Природно-специфические свойства алгебраических операций на множестве. Это свойства, которые позволяют выделить изучаемую алгебраическую структуру из других. Движущей идеей в содержательных связях данного компонента является идея «алгебраической структуризации».

Названные компоненты понятия алгебраической структуры в различных (алгебраических) теориях курса представлены по-разному. Математические теории курса алгебры можно условно разделить на два блока: *блок интуитивных теорий (БИТ)* и *блок аксиоматических теорий (БАТ)*.

Следуя Р. Столлу[3], под интуитивными теориями мы понимаем математические теории, построенные описанием «природы» элементов рассматриваемых множеств и правил, задающих алгебраические операции и отношения на них. В таких теориях элементы множеств описываются своими характеристическими свойствами, конструктивными по своей сущности. Алгебраические операции и отношения на множестве задаются определенными правилами (формулами), и все свойства алгебраических операций доказываются на этой основе. Причем среди свойств есть те, которые отвечают только специфике заданной операции (мы их называем базисными свойствами), другие являются их логическим следствием, третьи — комбинацией правил задания и логических следствий базисных свойств.

Изучение аксиоматических теорий в курсе алгебры осуществляется на основе алгебраических структур (групп, колец, полей и т. д.). Отметим, что элементы множеств в алгебраических структурах рассматриваются вне возможной их природы, а алгебраические операции — вне специфики «природного» правила соответствующего отображения. Среди свойств алгебраической операции выделяются те, которые определены аксиоматически (аксиомы группы, кольца и т. п.), и их логические следствия.

Связь между интуитивными теориями и алгебраическими структурами с точки зрения математики очевидна. С одной стороны, интуитивные теории являются «формализуемым» материалом, приводимым к алгебраическим структурам, то есть аксиоматические теории есть результат *формализации* интуитивных теорий. С другой стороны, интуитивные теории являются моделями аксиоматических теорий, а потому являются фундаментом для их *интерпретаций*. При этом аксиомы алгебраических структур являются базисными свойствами алгебраических операций интуитивных теорий. Видимо, поэтому Э. Фрид соотносит алгебру с «естественным развитием аксиоматического метода»[4]. Г. Вейль в

связи с этим отмечает, что алгебра соединяет в себе две идеи математики: конструктивизм и аксиоматизацию. Ни один из подходов, по его мнению, не является в математике приоритетным, имеется «взаимопроникновение этих процедур»[5]. Иначе говоря, каждая интуитивная теория есть алгебраическая структура, представленная конструктивно и допускающая аксиоматизацию, в рамках которой «природа» рассматриваемых объектов обретает формализованное состояние, частным случаем которой и выступает интуитивная теория.

В указанном взаимопроникновении материала обнаруживается объединяющая основа — понятие алгебраической структуры. Для воспроизводства алгебраического знания важно уяснить эту суть связей между блоками материала курса алгебры. Отношение понятий интуитивных теорий к алгебраическим структурам можно трактовать как *формальный* (или формализованный) их смысл. Например, формальный смысл умножения подстановок фиксированной степени *n* (элементов множества S_n) состоит в свойствах отображения декартова произведения множества S_n в множество S_n (существование и однозначность результата и т. д.). Отношение алгебраических структур к интуитивным теориям можно трактовать как их *конструктивный* смысл. По своей сущности, он характеризует возможность математической интерпретации аксиоматических теорий (построения моделей).

Можно сказать, что содержательные связи есть связи формализованного и конструктивного смысла компонентов понятия алгебраической структуры, а потому их выделение в одном компоненте позволяет определить новые понятия и свойства, относящиеся к другому компоненту (порождающая функция содержательных связей). Вместе с тем, имеется отношение и обратного направления: содержательные связи одного компонента алгебраической структуры в «предыдущих» компонентах позволяют дать «проекцию», математическую интерпретацию (проекционная функция содержательных связей). Иначе говоря, содержательные связи в каждом компоненте алгебраической структуры *однородны*, имеют проекционно-порождающий характер, характеризуют принадлежность понятий к целостному образованию — понятию алгебраической структуры. Компоненты понятия алгебраической структуры имеют место во всех математических теориях курса алгебры, а потому отражают причастность материала к *целостности* содержания курса. Так что содержательные связи курса алгебры как связи целостного образования являются связями в компонентах понятия алгебраической структуры, рассматриваемых на различном материале.

Таким образом, при рассмотрении проблемы понимания алгебры в обучении с позиций целостности необходимо исходить из следующих положений методологии математического познания.

1. Целостность и понимание — два взаимозависимых понятия. В обучении, нацеленном на понимание, необходимо учитывать движение от целого к частям и обратно, причем начало процесса познания требует сосредоточения на целом (Г. Х. Гадамер, В. А. Лекторский, Г. И. Рузавин и др.).

2. Курс алгебры пронизывают две «взаимопроникающие» математические идеи: конструктивизм и аксиоматизация (Г. Вейль, И. Р. Шафаревич и др.). Алгебраические знания конструируются на их основе с помощью двух основных методов математического познания (формализации и интерпретации), имеющих противоположные направления.

3. Единство содержания курса алгебры определяется понятием алгебраической структуры (Н. Бурбаки, В. А. Тестов, Э. Фрид и др.).

В процессе проведенного теоретического анализа литературы, на основе собственного опыта работы в вузе, опыта работы преподавателей-алгебраистов и проведенного эксперимента нами была разработана концепция раскрытия содержательных связей в курсе алгебры. В рамках этой концепции выделены следующие положения.

– С точки зрения методологии учебного познания алгебры процесс понимания есть *раскрытие содержательных связей*, составляющих сущность знания в его целостности. Раскрываемая содержательная связь обеспечивает *устойчивость* в познании.

– Устойчивость познания определяется понятием целостности. В обучении алгебре целостность выступает как *цель* и *средство* раскрытия содержательных связей. Изучение студентом курса алгебры будет нацелено на раскрытие содержательных связей, если:

а) учебный материал будет обладать свойством целостности, что обеспечивается его структурированием в совокупностях *однородных* содержательных связей;

б) организация изучения материала будет ориентирована на *самостоятельную деятельность* студентов по выявлению содержательных связей в математическом материале.

– Содержательные связи в предметном материале алгебры обусловлены понятием алгебраической структуры и подразделяются на три основных рода:

а) ***координатизационные***, которые отражают «предметную» сущность элементов множеств, рассматриваемых в алгебре, и характеризуют «выполнимость» алгебраических операций и отношений на множестве (связи, базирующиеся на идее координатизации);

б) ***синтаксические***, которые характеризуют выражение свойств алгебраических операций (и отношений) на множестве на алгебраическом языке (связи, базирующиеся на идее символизации);

в) ***структурно-абстрактные***, которые характеризуют свойства алгебраических операций (и отношений) в их *совокупности* и обусловливают тип алгебраической структуры (связи, базирующиеся на идее алгебраической структуризации).

– Содержательные связи в материале курса алгебры выполняют *порождающую* и *проекционную* функции в развитии абстрактных понятий курса алгебры.

Методические аспекты реализации концепции раскрытия содержательных связей определяются двумя основными направлениями.

П е р в о е направление связано с необходимостью структурирования материала с целью придания свойства целостности материалу. Концептуальные положения позволяют построить *содержательные параллели курса*. Под **содержательной параллелью курса** мы понимаем совокупность учебного материала с *однородными* содержательными связями. Исходя из специфики содержательных связей курса алгебры и компонентов понятия алгебраической структуры, были выделены три основные параллели:

- параллель понятий множества и алгебраической операции на нем;
- параллель структурных свойств алгебраической операции на множестве;
- параллель природно-специфических свойств алгебраической операции на множестве.

Эти параллели следующим образом соотносятся с видами содержательных связей курса, определенных концепцией:

Содержательная параллель	Вид содержательных связей
Параллель понятий множества и алгебраического действия на нем	координатизационные
Параллель структурных свойств алгебраических действий	синтаксические
Параллель природно-специфических свойств алгебраической операции на множестве	структурно-абстрактные

В основу выделения содержательных параллелей в материале курса положены следующие их **существенные признаки**:

- сопоставимость учебного материала, состоящая в общности свойств понятий различных математических теорий;
- генетичность учебного материала, выражающаяся в промежуточном положении между формально-абстрактным и конкретно-интуитивным уровнями изучения понятий;
- адекватность учебного материала одному компоненту понятия алгебраической структуры (множество и алгебраические действия на нем, структурные свойства алгебраических действий на множестве, природно-специфические свойства алгебраических действий на множестве).

Иначе говоря, каждая содержательная параллель является «материализацией» *одного рода* содержательных связей в курсе алгебры. Структурирование курса алгебры в содержательных параллелях отвечает компонентам понятия алгебраической структуры, а потому придает свойство целостности изучаемому материалу.

Для того чтобы связи раскрывались студентами, необходимо определить адекватные тому учебные действия. Поэтому для в т о р о г о направления в построении методического аспекта реализации концепции раскрытия содержательных связей характерно вовлечение студентов в действия по раскрытию целостности материала.

Исходя из специфики методов алгебры, мы пришли к выводу, что основными методами, позволяющими рассматривать содержание курса в единстве, являются метод формализации и интерпретации. Как показано выше, эти два метода объективно объединяют два блока материала курса алгебры (БИТ и БАТ).

Свойство «двунаправленности» мыслительных процедур по пониманию (А. А. Брудный, Л. М. Веккер, В. П. Зинченко и др.) убедили нас в том, что учебные действия по раскрытию содержательных связей продуктивны в тех случаях, когда они выполняются в *двух встречных направлениях*[6]. Использование учебного действия одного направления, хотя и способствует пониманию, но не лишает односторонности восприятия, а следовательно, не обеспечивает целостного знания.

Указанные основания позволили выделить два вида учебных действий: *действия формализации* и *интерпретации*.

Сущность действия *формализации* состоит в постижении формализованного смысла изучаемых понятий, то есть в выделении сущности изучаемых понятий, характеризующей их отношение к более абстрактным понятиям алгебры. Иначе говоря, формализация есть перевод конкретных конструкций на язык алгебраических структур. Обратное действие, которое состоит в постижении конструктивного смысла изучаемых понятий, то есть в выделении в изучаемых понятиях их конструктивной сущности, конкретизирующей их отношение к алгебраическим структурам, есть действие *интерпретации*.

Таким образом, можно выдвинуть следующие **методические положения** концепции раскрытия содержательных связей в курсе алгебры.

➢ Средством структурирования предметного материала курса алгебры в целях придания ему свойства целостности являются *содержательные параллели*.

➢ Раскрытию содержательных связей курса способствует выполнение таких заданий, которые ориентированы на *парное* выполнение действий формализации и интерпретации.

При организации деятельности студентов, направленной на выполнение действий по раскрытию целостности алгебры, мы исходим из личностно-деятельностного подхода к обучению. Поскольку деятельность является активностью человека по преодолению различных преград (противоречий и т. д.), то для раскрытия целостности необходимо создавать специальные учебные ситуации, в процессе разрешения которых студентом осуществляется понимание материала, т. е. устанавливаются содержательные связи в изучаемом материале. Всякая учебная ситуация может быть создана, если постановка учебной задачи и ее решение поддерживаются внутренней мотивацией. Следовательно, необходимо выработать «потребность понять». Совокупность педагогических обстоятельств, при которых возникает эта внутренняя потребность, мы называем *ситуацией непонимания*. Здесь имеется в виду (правомерное) непонимание, которое представляет собой преодолимый барьер для субъекта познания. В ситуации непонимания студент осознает математический факт и усматривает необходимость соотнесения его с общим подходом. Исходя из идеи целостности, можно определить требования к организации обучения алгебре, следование которым создает ситуации непонимания.

1. Предъявление целостности материала в «зримом» виде средствами специально подобранного учебного материала. Это можно осуществить составлением блок-схем (таблиц и т. п.), включающих основные компоненты понятия алгебраической структуры. Данное положение согласуется с процедурой познания целостного объекта в движении от целого к частям. Предъявленная целостность в своей ориентирующей функции нацеливает на выполнение определенных учебных действий. Обращение к «зримой целостности» в процессе познания частей использует формализацию знаний, на основе расшифровки предъявленной целостности осуществляется противоположно направленное учебное действие интерпретации.

2. Выделение ключевых понятий в изучаемом предметном материале. Система ключевых понятий позволяет придать учебному материалу свойство смысловой дискретности, устранение которой соотнесением ключевых понятий с изучаемым материалом способствует выполнению аналитико-синтетических действий по установлению содержательных связей в нем.

3. Многомерность учебного материала, обусловленная различными трактовками положений изучаемых теорий. «Размерность» определяется положением учебного материала в общей схеме познания и теми связями, через которые возможен «выход» на новые понятия.

Раскрытие содержательных связей студентами в процессуальном плане представляет собой совокупность специально созданных ситуаций непонимания и их разрешения. Ситуация непонимания будет разрешима, если постановка учебных задач будет осуществляться *самим студентом*. Это обосновывается тем, что в процессе понимания происходят изменения в субъекте познания, связанные с работой и развитием теоретического мышления в его самостоятельной деятельности.

При решении математических (учебных) задач важно обеспечить студента материалами сопровождающего характера. Не только ответами, но и указаниями, рекомендациями, системами наводящих вопросов. То есть решение учебной задачи осуществляется *лабораторно* в рамках самостоятельной работы студентов.

Таким образом, методическая система действий в организации *самостоятельной деятельности студента* по раскрытию содержательных связей имеет следующие составляющие:

1) создание педагогических ситуаций, в которых обеспечиваются условия для соотнесения студентом изучаемого материала с понятием алгебраической структуры (*ситуации непонимания*);

2) создание условий для постановки учебных задач студентами, возможность которых обеспечивается специальными учебными заданиями на выполнение учебных действий *формализации* и *интерпретации.* Требованиями к таким заданиям являются:

- возможность различных математических интерпретаций изучаемых положений;
- приобретение студентами опыта формализованной записи рассуждений (обоснований, выводов и т. д.) и их результатов.

3) организация решения учебных задач в лаборатории самостоятельной деятельности студента, организованной средствами математических задач и сопровождающими материалами к их решению (содержательный анализ и содержательное обобщение понятий, определенных условиями задач и т. д.).

Итак, герменевтический подход к обучению определяет понятие целостности как основание методики его реализации. Единство целостности и понимания в изучении вузовского курса алгебры достигается структурированием учебного материала в содержательных параллелях и организацией деятельности студентов по раскрытию содержательных связей в изучаемом материале.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Лященко Е. И.* Целостность при анализе учебного материала по математике / Проблемы теории и практики обучения математике. Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «56 Герценовские чтения». СПб., 2003. С. 18–22.

[2] *Блауберг И. В., Юдин Б. Г.* Понятие целостности и его роль в научном познании. М., 1972.

[3] *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории / Под ред. Ю. А. Шихановича. М., 1968.

[4] *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру / Пер. с венг. Ю. А. Данилова. М., 1979.

[5] *Вейль Г.* Математическое мышление / Под ред. Б. В. Бирюкова и А. Н. Паршина. М., 1989. С. 26.

[6] *Зинченко В. П.* Психологические основы педагогики. М., 2002.

O. Sotnikova

THE INTEGRITY IN TEACHING ALGEBRA AT A PEDAGOGICAL UNIVERSITY (HERMENEUTIC APPROACH)

The problem of understanding in the process of teaching algebra at a pedagogical university is discussed. A methodology based on interdependence of understanding and integrity is proposed. The relationships of the content of teaching and instruction are disclosed, and their methodological aspects are formulated.