

**КАЧЕСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ
СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ВЯЗКОСТИ
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО СПЕКТРА ЭНЕРГИИ
РАЗВИТОЙ ИЗОТРОПНОЙ ЗАТУХАЮЩЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ**

Обсуждается общая структура одномерного спектра энергии развитой затухающей изотропной турбулентности в рамках так называемых качественных моделей (англ. toy models). Уравнение спектрального баланса энергии представлено в безразмерной форме и замкнуто с помощью модифицированной схемы Гейзенберга. В результате вычислена спектральная функция полной вязкости и продемонстрирован ее универсальный характер.

Адекватное теоретическое описание систем с сильно развитой изотропной турбулентностью все еще остается одной из актуальных проблем теоретической физики. При этом спектры энергии — парный коррелятор скорости и функция переноса — играют при изучении турбулентности особую роль. Имеется достаточный экспериментальный материал, касающийся как их общего вида в инерционном интервале и за его пределами, так и деталей процесса переноса энергии по спектру. По этой причине любая модель турбулентности должна сравнивать полученные теоретически энергетические спектры с экспериментальными, что является важным аргументом в пользу ее применимости. Однако не все характеристики спектров на нынешнем этапе допускают экспериментальное исследование, так что желательно сравнивать новые теоретические модели с простыми качественными моделями развитой турбулентности, заведомо более «грубыми», то есть не учитывающими всех деталей явления, зато введенными на основе простых и легко формализуемых математически предположений. Такие полуфеноменологические модели, получившие английское название *toy models*, имеют в теории турбулентности (на фоне ее сложных нелинейных математических уравнений) весьма широкое применение.

В данной статье обсуждаются качественные модели (*toy models*) энергетических спектров трехмерной развитой изотропной затухающей турбулентности, которая (теоретически) должна описываться во всем многообразии ее свойств математической моделью, имеющей в основе уравнение Навье – Стокса. В принципе, из того же уравнения должны выводиться и спектры энергии поля скоростей, описывающие как общие процессы накачки и диссипации энергии в системе, так и детали переноса энергии по спектру. Практические трудности построения общей теории турбулентных спектров связаны со сложным существенно нелинейным характером уравнения Навье – Стокса. Поэтому все реально используемые модели, из которых получают сопоставляемые с экспериментом результаты, основаны на той или иной схеме замыкания, в основу которой положена определенная физическая гипотеза. В случае конструирования одномерного спектра энергии E это означает, что соответствующая функция переноса T энергии по спектру должна быть выражена через сам спектр E из каких-либо внешних по отношению к уравнению Навье – Стокса соображений.

Подчеркнем еще раз, что *все* используемые практически схемы замыкания основаны не на точном решении уравнения Навье – Стокса (то есть нахождении общего вида функции переноса), а на какой-либо гипотезе замыкания, так что в этом смысле нет принципиальной разницы между построенной на простых соображениях качественной и реальной рабочей моделью турбулентности. Среди наиболее успешных схем замыкания выделим модель максимальной хаотичности поля скорости [1], введенную на основе модифицированной стохастической модели Уайлда.

Материал данной статьи относится только к трехмерной затухающей однородной изотропной турбулентности. Особо подчеркнем, что случай *двумерной* турбулентности здесь не обсуждается из-за более сложного характера законов сохранения (и числа сохраняющихся величин!), что приводит и к принципиально иному устройству энергетических спектров.

В статье описана общая структура одномерного энергетического спектра развитой турбулентности, изложены основы феноменологической теории Колмогорова, обосновывающей универсальность спектров энергии развитой турбулентности в инерционном интервале волновых чисел и в диссипационной области. Сама колмогоровская теория не замыкает уравнение спектрального баланса энергии, поэтому в статье обсуждается выбор схемы замыкания этого уравнения. Прежде чем перейти собственно к качественным моделям, мы приводим краткий обзор стохастических схем замыкания, знание основ которых существенно для понимания проблем, связанных с расчетом энергетических спектров. Затем обсуждаются качественные схемы замыкания уравнения баланса (toy models). За основу выбрана модифицированная качественная модель Гейзенберга как наиболее приемлемая для описания экспериментальных спектров турбулентности. Сконструированная схема замыкания пригодна для всего диапазона волновых чисел. В работе уравнение спектрального баланса представлено в безразмерной форме, после чего вычислена спектральная функция вязкости, описывающая детали переноса энергии по спектру и включающая кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

Структура одномерного энергетического спектра развитой изотропной турбулентности

Одномерный энергетический спектр развитой изотропной турбулентности

Векторное поле скорости $\varphi_i(x,t)$ несжимаемой вязкой жидкости описывается уравнением Навье – Стокса [2]

$$\partial_i \varphi_i + (\varphi \cdot \partial) \varphi_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i P + \nu \Delta \varphi_i, \quad (1)$$

дополненным условием несжимаемости

$$\partial_i \varphi_i = 0.$$

Здесь ρ — плотность жидкости, P — давление, ν — коэффициент кинематической вязкости, Δ — оператор Лапласа. Уравнение (1) представляет собой второй закон Ньютона, записанный в системе координат, движущейся вместе с жидкостью, а нахождение его решения относится к числу наиболее сложных задач классической гидродинамики. Однако существует возможность переформулировать задачу, перейдя от уравнения (1) к одномерному уравнению спектрального баланса в представлении Фурье волновых чисел k [3]. Ниже подобное описание принято как основное.

Для одномерного спектра энергии $E(k)$ развитой затухающей изотропной турбулентности уравнение спектрального баланса принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k,t) = -2\nu k^2 E(k,t) + T(k,t). \quad (2)$$

Функция $T(k, t)$ называется одномерной функцией переноса энергии по спектру, причем на нее наложено условие

$$\int_0^{\infty} dk \cdot T(k, t) = 0.$$

Введем полную энергию пульсаций

$$e(t) \equiv \int_0^{\infty} dk \cdot E(k, t) \quad (3)$$

и мощность диссипации на единицу массы

$$\bar{\varepsilon}(t) \equiv - \int_0^{\infty} dk \cdot 2\nu k^2 E(k, t). \quad (4)$$

Тогда от уравнения (2) можно перейти к его проинтегрированной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} e(t) = -\bar{\varepsilon}(t). \quad (5)$$

Соотношение (5) называется интегральной формой уравнения баланса энергии. В дальнейшем для краткости явная зависимость спектральных функций от времени t указываться не будет.

Феноменологическая теория Колмогорова

Преимущество описания системы на языке соотношения баланса (2) заключается в физической наглядности последнего. Согласно *феноменологической теории Колмогорова*, режим затухающей турбулентности характеризуется двумя основными масштабами: энергия исходно содержится в системе на малых волновых числах k (то есть в крупных вихрях) порядка $m \equiv L^{-1}$, где L — внешний (интегральный) масштаб турбулентности, и рассеивается в области больших k порядка k_d (область диссипации). Между этими двумя областями лежит широкий инерционный интервал, в котором реализуется лишь перенос энергии по спектру. Подобное устройство спектра отвечает дроблению крупных вихрей и их последующему затуханию под действием вязкого трения.

Колмогоров сформулировал две гипотезы:

1. Вид спектра энергии $E(k)$ в инерционном интервале и в области больших волновых чисел k определяется только двумя параметрами — ν и $\bar{\varepsilon}$.

2. В самом инерционном интервале он определяется только накачкой, которая, в соответствии с интегральной формой уравнения баланса (5), равна мощности диссипации $\bar{\varepsilon}$.

Феноменологическая теория Колмогорова демонстрирует тем самым *универсальность* спектров энергии $E(k)$ развитой турбулентности в инерционном интервале волновых чисел и в диссипационной области. Это означает, что при-

веденные спектры $E(k) \bar{\varepsilon}^{-2/3} k_d^{4/3}$ являются универсальной для всех турбулентных систем функцией безразмерного аргумента k/k_d . Для широкого класса турбулентных систем экспериментальные данные подтверждают это заключение теории Колмогорова [3]. Что касается энергосодержащей области волновых чисел, то здесь приведенные спектры не ложатся на единую кривую, образуя широкий «веер». В этом отражается чувствительность длинноволновой части спектра к деталям накачки энергии в пульсационную составляющую, что обусловлено граничными условиями и взаимодействием с усредненным сечением. Однако для определенного класса течений можно рассчитывать на универсальное поведение и в данной области спектра. Впервые возможность подобной универсальности обсуждалась в работе [4]. Для этого должно выполняться условие локальной однородности, означающее малость интегрального масштаба турбулентности по сравнению с характерным расстоянием, на котором заметно меняются статистические характеристики пульсаций. Такое условие выполняется, в частности, для затухающей за решеткой турбулентности.

По теории Колмогорова, отношение двух основных масштабов турбулентности (m и k_d) характеризуется числом Рейнольдса Re — безразмерной комбинацией внешнего масштаба L , вязкости ν и характерной скорости набегающего потока V , связанной с диссипацией соотношением $\bar{\varepsilon} = V^3 / L$. Тогда

$$\frac{k_d}{m} = (Re)^{3/4}, \quad (6)$$

и, таким образом, на основании выражений (3) и (4) приходим к равенству

$$k_d = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\nu^3} \right)^{1/4}. \quad (7)$$

Иными словами, число Рейнольдса определяет ширину инерционного интервала. Развитой турбулентности соответствуют большие числа Рейнольдса Re порядка 10^2 .

Спектр энергии $E(k)$ можно представить в виде

$$E(k) = C_K \bar{\varepsilon}^{-2/3} k^{-5/3} F\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{k_d}\right), \quad (8)$$

где C_K — безразмерная постоянная (константа Колмогорова), а F — безразмерная скейлинговая функция от безразмерных же аргументов, на которую в инерционном интервале налагается требование $F = 1$ (поскольку в нем спектр определяется только диссипацией).

Для нахождения спектра $E(k)$ из уравнения баланса в виде (2) или (5) необходимо указать схему замыкания, то есть выразить функцию $T(k)$, описывающую детали переноса энергии по спектру, через $E(k)$. (Феноменологическая теория Колмогорова сама по себе схемы замыкания не содержит!) Выбор подходящей модели для функции переноса позволяет рассчитать полный спектр энергии и тем самым выявить механизмы накачивания и диссипации энергии в

турбулентной системе. Проблема эта до конца не решена, большинство существующих на текущий момент схем замыкания имеют существенный недостаток — отсутствие универсальности во всем диапазоне волновых чисел, в том числе в области диссипации, полученные же универсальные решения, хорошо согласующиеся с экспериментом, основываются на сложных математических моделях (см., например, работу [5]).

Для любой качественной модели процесса достаточно указать простой вид подобного замыкания, по возможности доставляющий универсальный вид спектра энергии во всем диапазоне волновых чисел, то есть для вихрей любого масштаба.

Выбор схемы замыкания уравнения баланса энергии

Стохастические модели турбулентности

Успех феноменологической теории Колмогорова для развитой турбулентности стимулировал построение статистических моделей. Применительно к модели изотропной турбулентности построение статистического ансамбля впервые было осуществлено Уайлдом в теперь уже классической работе [6]. Его подход основывался на введении поперечной ($\partial_i f_i = 0$) случайной стохастической *внешней силы* f_i , действующей на единичную массу жидкости. Тогда уравнение (1) представляется равенством

$$\partial_i \varphi_i + (\varphi \cdot \partial) \varphi_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i P + \nu \Delta \varphi_i + f_i. \quad (1a)$$

Случайная внешняя сила в выражении (1a) моделирует стохастический характер поля скоростей φ_1 . Она считается гауссово распределенной, с нулевым средним и коррелятором в виде белого шума. Подобное устройство случайной силы (максимальная хаотичность ее поля) соответствует максимуму ее информационной энтропии. Случайная сила тем самым имитирует компенсирующую диссипацию накачку энергии в систему от взаимодействия с крупномасштабными пульсациями.

Предложенная Уайлдом стохастическая модель до настоящего времени является основной при изучении развитой турбулентности. Тем не менее, она встречается с определенными трудностями: искусственность введения случайной силы, сложность обобщения модели на неоднородный случай, техническая громоздкость осуществления принципа максимальной хаотичности. Кроме того, в ней парный коррелятор диссипации энергии

$$\langle [\partial_i \varphi_j + \partial_j \varphi_i](x) [\partial_i \varphi_m + \partial_m \varphi_i](x') \rangle \approx \text{const} \cdot |x - x'|^{-\mu}$$

имеет неверное степенное поведение. Модель Уайлда доставляет значение $\mu = 0$, тогда как эксперимент демонстрирует $\mu \approx 0,2$.

Альтернативой модели уайлдовской выступает *модель максимальной хаотичности* [1], в основу которой положен спектральный баланс пульсационной энергии. Основное предположение этой модели о характере эволюции системы состоит в том, что на начальной стадии затухания турбулентности скорость убывания энергии относительно мала, так что в каждый момент времени функция распределения пульсаций по-прежнему будет иметь квазистационарный вид.

Задача ставится аналогично и при рассмотрении турбулентного потока за решеткой при постоянной средней скорости потока V вдоль оси z . Такая задача стационарна, а роль времени t в ней играет расстояние z от решетки. Предполагая при этом локальную однородность системы, связанную с относительной малостью изменения вдоль z характеристик пульсаций на расстояниях порядка внешнего масштаба турбулентности L (иногда называемого также корреляционным радиусом), баланс энергии можно записать с заменой ∂_t на $V\partial_z$.

Модель максимальной хаотичности позволяет написать замкнутую систему уравнений и решать ее, пользуясь условием максимума энтропии. При этом получить ответ в общем виде затруднительно. Обычно с помощью квантово-полевого по происхождению аппарата ренорм-группы и техники ε -разложения ищется автомодельное решение в области волновых чисел из инерционного интервала и меньших.

Именно в модели максимальной хаотичности впервые теоретически рассчитан и обоснован спектр энергии в области всех волновых чисел [4].

Качественные схемы замыкания

Наиболее простой качественной схемой, замыкающей уравнение спектрального баланса (2), является модель, предложенная в 1948 году Гейзенбергом [3]. Проинтегрируем уравнение (2) по малым волновым числам k и представим поток энергии по спектру

$$j(k) \equiv \int_0^k T(q) dq$$

(убывающий до нуля при $k \rightarrow \infty$) в виде, аналогичном вкладу (4) от вязкости:

$$j(k) = \int_0^k T(q) dq = -2\nu_k(k) \int_0^k q^2 E(q) dq. \quad (9)$$

Введенная в выражении (9) функция $\nu_k(k)$ называется кинематическим коэффициентом турбулентной вязкости. В схеме Гейзенберга ее можно найти, не решая точно исходное уравнение (2), которое эквивалентно уравнению Навье – Стокса (1) для несжимаемой вязкой жидкости, а комбинируя $\nu_k(k)$ из соображений размерности из всех величин, от которых она может зависеть, то есть из $E(k)$ и k . Гейзенберг предложил простую модель

$$v_k(k) \equiv \gamma \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(q)}{q^3}} dq \quad (10)$$

с безразмерным подгоночным параметром γ . Легко убедиться, что расстановка пределов интегрирования в выражении (10) приводит к правильному асимптотическому поведению $v_k(k)$, а именно к вязкому затуханию крупных вихрей. На самом деле функция $j(k)$ зависит статистически от всех возмущений с разными волновыми числами k , так что она не может быть выражена через одни только $E(k)$ и k . В этом упрощенном предположении и проявляется главная особенность качественной модели турбулентного спектра.

Модель (9)–(10) доставляет верную асимптотику $E(k)$ в области диссипации. При этом левая часть проинтегрированного по k уравнения (9), связанная с накачкой энергии в систему, набирается, напротив, в энергосодержащей области (напомним, что для развитой турбулентности между этими областями лежит широкий инерционный интервал), поэтому с хорошей точностью

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(q) dq \cong -\varepsilon. \quad (11)$$

Обозначение ε , в отличие от (4), без черты сверху подчеркивает, что мы полагаем ее в нашем приближении константой. Соотношение (11) представляет собой закон сохранения энергии для установившегося турбулентного режима: заданная мощность энергии ε , рассеиваемой на больших k , равна мощности энергии, накачиваемой в систему на малых k .

Собирая выражения (2) и (9)–(11) вместе, приходим к замкнутому интегральному уравнению на функцию $E(k)$:

$$\varepsilon = 2[v + v_k(k)] \int_0^k q^2 E(q) dq = 2 \int_0^k q^2 E(q) dq \cdot \left[v + \gamma \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(p)}{p^3}} dp \right]. \quad (12)$$

Для его решения введем функцию

$$H(k) = \int_0^k q^2 E(q) dq, \quad (13)$$

поделим на $H(k)$ левую и правую части (5) (это допустимо, поскольку тривиальное решение $H(k) = 0$ физически некорректно) и возьмем производную по k . Тогда получаем, что

$$H(k) = \left(\frac{3\gamma^2}{\varepsilon^2} \cdot k^{-4} + C \right)^{-1/3}, \quad (14)$$

где C — постоянная интегрирования. Соответственно,

$$E(k) = \frac{4\gamma^2}{\varepsilon^2} \cdot k^{-5/3} \cdot \left(\frac{3\gamma^2}{\varepsilon^2} + Ck^4 \right)^{-4/3}. \quad (15)$$

Мы получили решение Баса—Чандрасекара (1949) [3] в модели Гейзенберга. Асимптотики этого решения суть $k^{-5/3}$ в инерционном интервале и k^{-7} в области диссипации, что полностью соответствует эксперименту. Задача, однако, не решена до конца: энергосодержащая область, порождающая еще один размерный параметр — внешний масштаб L , в модели (10) не учтена. Следовательно, для описания всего спектра, включая малые волновые числа, необходимо расширение схемы.

Легко увидеть, что модель Гейзенберга для кинематического коэффициента турбулентной вязкости не пригодна для энергосодержащей области, хотя бы в силу неаналитичности выражения (10) при $k \rightarrow 0$. Кроме того, в области малых волновых чисел в схему замыкания должен войти еще один параметр — внешний масштаб L (или, что удобнее, обратная к нему величина $m = L^{-1}$). С учетом этого в работе [7] была предложена простая модификация модели Гейзенберга, а именно: в знаменателе интеграла в выражении (10) под знаком корня была сделана замена $q^3 \rightarrow (q^2 + m^2)^{3/2}$ для продолжения свойств аналитичности по k вплоть до малых масштабов. В силу малости m , что следует из выражения (6), модифицированная модель Гейзенберга переходит асимптотически в выражение (10) на больших волновых числах. Кроме того, скейлинговая функция F в равенство (8) была представлена в виде произведения

$$F\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{k_d}\right) = F_1\left(\frac{k}{m}\right) F_2\left(\frac{k}{k_d}\right), \quad (16)$$

причем в инерционном интервале $F_1 = F_2 = 1$, а F_2 совпадает со скейлинговой функцией F модели Гейзенберга. В результате в работе [7] была найдена $\gamma = 0,31$.

Интересно отметить, что даже такая грубая модель приводит к одномерному спектру энергии, хорошо совпадающему с экспериментальным (несколько хуже, чем более точная схема замыкания [5]). Это доказывает практическую эффективность предложенной Гейзенбергом схемы замыкания, поскольку один из критериев приемлемой качественной модели — возможность ее расширения на весь диапазон волновых чисел.

Альтернативная схема замыкания (независимо от Гейзенберга) была предложена для функции переноса Коважным (1948) [3]:

$$j(k) = -2\gamma_{\text{Ков.}} E^{3/2}(k) k^{5/2}$$

с соответствующей подгоночной константой $\gamma_{\text{Ков.}}$. Таким образом, Коважный предложил моделировать из размерных соображений не только собственно турбулентную добавку к вязкости $\nu_k(k)$, а функцию $j(k)$ целиком. Однако схема замыкания Коважного, как и более сложные модели Стюарта—Таунсенда (1951), Огуры—Миякоды (1953) и прочие (подробнее см. в работе [3]), не обладают должной степенью универсальности. Они не могут быть непрерывно продолжены на весь интервал волновых чисел, не доставляют правильные асимптотики, так что схему Гейзенберга и ее расширения следует считать лучшей качественной моделью из существующих.

Безразмерная форма уравнения спектрального баланса и вычисление спектральной функции полной вязкости

Представим уравнение баланса

$$\bar{\varepsilon} = 2[\nu + \nu_K(k)] \int_0^k q^2 E(q) dq \quad (17)$$

в безразмерном виде. Для этого введем безразмерную функцию f — такую, что

$$E(k) = \bar{\varepsilon}^{-2/3} k^{-5/3} f(k/k_d),$$

и перейдем к безразмерной переменной $x = k/k_d$. Учитывая соотношение (7), перепишем выражение (17) в форме

$$1 = 2B(x) \int_0^x y^{1/3} f(y) dy, \quad (18)$$

где введено обозначение для безразмерной спектральной функции полной вязкости:

$$B \equiv 1 + \frac{\nu_K(k)}{\nu}. \quad (19)$$

В частности, при $B = 1$ турбулентный вклад в вязкость отсутствует. Для модели Гейзенберга (10) имеем:

$$B(x) = 1 + \gamma \int_x^\infty y^{-7/3} f^{1/2}(y) dy. \quad (20)$$

Любая качественная модель в таком подходе принимает вид

$$B(x) = 1 + \gamma b(x, f(x)),$$

где γ — подгоночная постоянная, а $b \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

На функцию $f(x)$ наложены условия:

$$f(x) \rightarrow C_K \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ и } f(x) \rightarrow C_1 x^{-16/3} \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Из сопоставления (15) с (8) видно, что

$$C_K = \frac{4}{3^{4/3} \gamma^{2/3}} = \left(\frac{8}{9\gamma} \right)^{2/3}. \quad (22)$$

В модифицированной модели Гейзенберга спектральная функция вязкости принимает соответственно форму

$$B(x) = 1 + \left(\frac{8\gamma^2}{9} \right)^{1/3} \int_x^\infty \frac{F^{1/2}(\tilde{x})}{\tilde{x}^{5/6} (\tilde{x}^2 + \text{Re}^{-3/2})^{3/4}} d\tilde{x}, \quad (23)$$

где в соответствии с выражением (8) сделана подстановка $f(x) \equiv C_k F(x)$ и учтено соотношение (22). Скейлинговая функция $F(x)$ найдена в работе [7], где она имеет вид

$$F(x) \equiv F_1(x)F_2(x);$$

$$F_1(x) = \frac{(x \cdot \text{Re}^{3/4})^{11/3}}{(2,0 + (x \cdot \text{Re}^{3/4})^2) \cdot [1 + 1,06 \cdot (1 + (x \cdot \text{Re}^{3/4})^2)^{-1/3}]}; \quad (24)$$

$$F_2(x) = \left[1 + \left(\frac{3}{2} C_k \right)^3 x^4 \right]^{-4/3}.$$

Отметим, что в работе [7] использовался альтернативный безразмерный аргумент $X \equiv k/m = x \cdot \text{Re}^{3/4}$ вместо $x \equiv k/k_d$, но для исследования функции спектральной вязкости он менее удобен. Таким образом, спектр $B(x)$ содержит лишь один параметр – число Рейнольдса Re , тогда как γ , и соответственно C_k , находятся путем численного решения уравнения спектрального баланса. Как показано в работе [7], $\gamma = 0,31$.

Исследуем поведение нормированных спектральных функций при различных значениях чисел Рейнольдса. На рис. 1 приведен график спектральной функции для типичного в случае развитой турбулентности значения $\text{Re} = 100$ при $\gamma = 0,31$.

На рис. 2 представлено семейство образующих поверхность в координатах (x, Re) спектральных кривых, соответствующих значению $\gamma = 0,31$ и различным числам Рейнольдса.

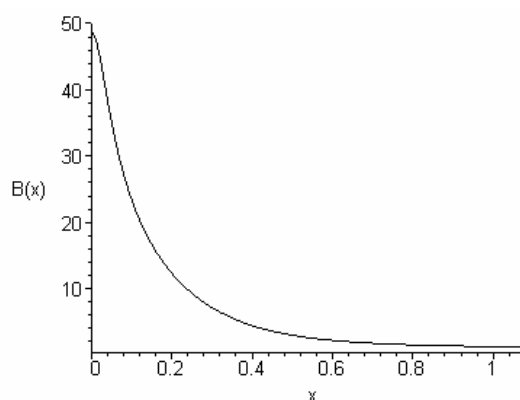


Рис. 1. Спектральная функция $B(x)$ при $\text{Re} = 100$

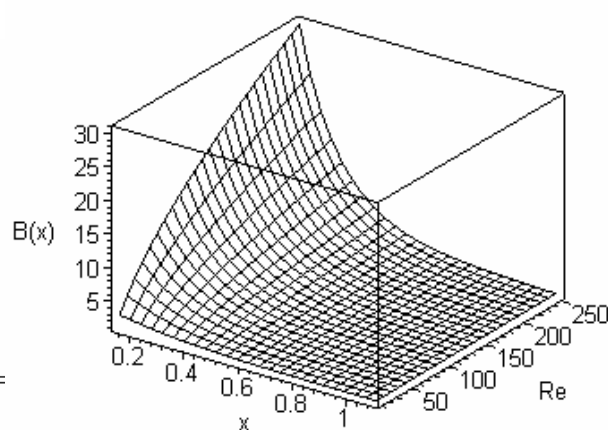


Рис. 2. Зависимость спектральной функции $B(x)$ от x и Re

Из графиков спектральной функции $B(x)$ видно, что она сводится, собственно, к вязкому вкладу при больших значениях x (в области диссипации), тогда как в энергосодержащей области $B(x) \gg 1$, то есть в ней существенную роль играет именно кинематическая вязкость $\nu_K(k)$. По мере возрастания числа Рейнольдса кинематическая вязкость становится все более существенной в области инерционного интервала (что хорошо видно на рис. 2). Таким образом, спектральная функция $B(x)$ демонстрирует правильное поведение в зависимости от возрастания роли эффектов вязкости в турбулентном спектре.

Обратимся теперь к безразмерному потоку энергии по спектру. Для его получения выразим функцию $j(k)$ через скейлинговую функцию F . Введем

$$J(x) = \frac{j(k)}{\varepsilon} = -2 \cdot \frac{\nu_K(k)}{\nu} \cdot \frac{\nu H(k)}{\varepsilon}. \quad (25)$$

Из выражения (19) следует $\nu_K/\nu = B(x) - 1$; кроме того, с учетом равенства (7),

$$\frac{\nu H(k)}{\varepsilon} = C_K \int_0^x y^{1/3} F(y) dy,$$

так что безразмерный поток имеет вид

$$J(x) = -2C_K (B(x) - 1) \int_0^x y^{1/3} F(y) dy. \quad (26)$$

На рис. 3 этот поток построен для $Re = 100$ и $\gamma = 0,31$. Напомним, что $J = 0$ (то есть $B = 1$) соответствует случай отсутствия турбулентной вязкости.

Поверхность $J(x, Re)$ приведена на рис. 4 при $\gamma = 0,31$. Для удобства визуального восприятия она построена для абсолютной величины J (так как сам поток $J < 0$).

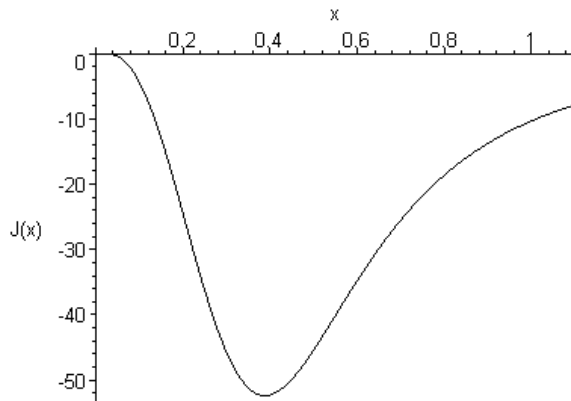


Рис. 3. Безразмерный поток энергии по спектру $J(x)$ при $Re = 100$

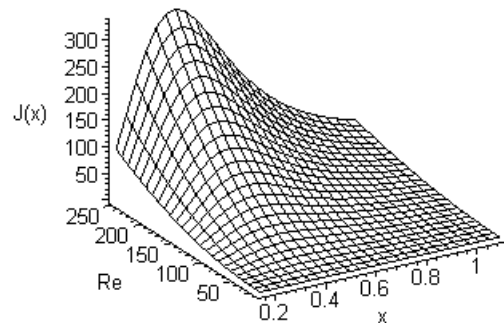


Рис. 4. Зависимость потока $J(x)$ от x и Re

На последнем графике видно, что процесс переноса энергии наиболее интенсивно осуществляется на малых x , в энергосодержащей области. При этом набирающийся на больших числах Рейнольдса максимум абсолютной величины функции переноса довольно острый и устойчивый по волновому числу x (порядка 0,4) при различных числах Рейнольдса. Последнее означает, что, несмотря на возрастание роли вязкостных эффектов, кардинального изменения схемы переноса энергии по спектру не происходит.

В действительности, что не учтено в модифицированной качественной модели Гейзенберга, турбулентные возмущения набираются статистически на всех волновых числах k .

* * *

Из сказанного следует, что:

1. Существенная нелинейность модели развитой турбулентности делает невозможным аналитическое решение уравнения баланса энергии (2) во всем диапазоне волновых чисел. Однако условие развитости турбулентности (большие значения чисел Рейнольдса и, следовательно, большая разнесенность энергосодержащей и диссипационной областей) позволяет не только получить правильные асимптотики в простой качественной модели, но и численно решить уравнение (2), используя закон сохранения энергии и метод анализа размерностей.

2. Качественная схема замыкания позволяет на основе найденной скейлинговой функции $F(x)$ вывести ряд других спектральных функций, таких как функция переноса $T(k)$ (для которой трудно предложить схему ее непосредственного экспериментального измерения) или более удобную, по нашему мнению, спектральную функцию полной вязкости $B(x)$.

3. Спектральная функция полной вязкости $B(x)$ в модифицированной модели Гейзенберга имеет универсальный характер (то есть охватывает весь диапазон волновых чисел k , параметрически зависит от числа Рейнольдса Re) и обнаруживает правильное качественное поведение при повышении роли эффектов вязкости в спектре.

4. Любая реальная модель турбулентного энергетического спектра должна обладать теми же качественными свойствами спектров, что и модифицированная модель Гейзенберга, так что в условиях отсутствия удовлетворительных экспериментальных данных о полном спектре $E(x)$ (на практике измеряется его продольная составляющая) в качестве грубой оценки пригодности можно использовать спектры, полученные в рамках качественной модели.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Аджемян Л. Ц., Налимов М. Ю. Теор. и мат. физ. Т. 91. 1992. № 2. С. 294–308.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., 1986.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. СПб., 1996.
4. Аджемян Л. Ц., Богданов С. Р., Сыщиков Ю. В. Вестник ЛГУ. № 10. 1982. С. 76–79.
5. Борисенок С. В. Вестник СПбГУ. Сер. 4. Вып. 2. 1994 (№ 11). С. 70–76.

-
6. Wyld H. D. Ann. Phys. 14. 1961. P. 143–165.
7. Борисенко С. В., Новиков С. В. Вестник СПбГУ. Сер. 4. Вып. 3. 1999. (№ 18).
С. 12–21.

S. Borisenok

**TOY MODEL OF VISCOSITY SPECTRUM FUNCTION
FOR ONE-DIMENSIONAL ENERGY SPECTRUM
OF DEVELOPED ISOTROPIC DECAYING TURBULENCE**

The general structure of the one-dimensional energy spectrum for developed decaying isotropic turbulence in the frame of the so-called «toy models» is discussed. The energy balance equation is represented in a dimensionless form with the modified Heisenberg closure scheme. As a result the full viscosity spectrum function is calculated and its universal character is demonstrated.