В. Н. Горбузов, С. Н. Даранчук

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ БАЗИС СИСТЕМЫ ЯКОБИ—ГЕССЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Для якобиевой линейной однородной системы Якоби—Гессе в частных производных разработан спектральный метод построения интегрального базиса.

Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему уравнений в частных производных

$$\Im_j(x)u = 0, \ \ j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

построенную на основании не являющихся линейно связанными на арифметическом пространстве R^n линейных дифференциальных операторов

$$\Im_j(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ji}(x) - x_i a_{j,n+1}(x))\partial_{x_i}, \ \ \forall x \in \mathrm{R}^n, \ \ j = \overline{1,m},$$

где функции

$$a_{j\tau} : x \to \sum_{i=1}^{n} a_{j\tau\, i} x_i + a_{j\tau,n+1}, \ \ \forall x \in \mathrm{R}^n, \ \ j = \overline{1,m}, \ \ \tau = \overline{1,n+1},$$

коэффициенты $a_{j\tau\,\delta}$ $(j = \overline{1,m}, \ \tau = \overline{1,n+1}, \ \delta = \overline{1,\mathrm{n}+1}$ $)$ суть числа из поля R такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\, a_{j,n+1,i} \,| \ \ne 0, \ \ j = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Систему (1) назовем *системой Якоби—Гессе в частных производных*, по необходимости [1. С. 70] считая $m < n$.

Дифференциальную систему (1) будем рассматривать в предположении выполнения системы коммутаторных тождеств

$$[\Im_j(x), \Im_\zeta(x)] = 0, \quad \forall x \in \mathrm{R}^n, \ j = \overline{1, m}, \quad \zeta = \overline{1, m}, \qquad (3)$$

которые выражают якобиевость [2] системы (1).

Поставим задачу построения интегрального базиса якобиевой системы (1), который состоит из $n - m$ функционально независимых на области X пространства R^n первых интегралов [1].

Отметим, что на основании метода частных интегралов [3] для якобиевой линейной однородной системы в частных производных, построенной на основании дифференциальных операторов с линейными координатными функциями [4], а также для R-линейной системы в полных дифференциалах [5] спектральным методом построены интегральные базисы.

В работах [6–8] решена задача по построению базиса первых интегралов с точностью до последнего множителя якобиевой системы (1) путем приведения ее к каноническим видам методом нормальных форм Жордана.

В данной работе задача нахождения интегрального базиса якобиевой системы (1) решена спектральным методом в замкнутом виде.

В основе разработанного подхода лежит метод частных интегралов многомерных полиномиальных дифференциальных систем из работ [3] и [9].

Линейный частный интеграл

Условия Фробениуса (3) равносильны перестановочности матриц коэффициентов [10] дифференциальной системы (1):

$$A_j A_\zeta = A_\zeta A_j, \ j = \overline{1, m}, \quad \zeta = \overline{1, m},$$

где квадратные матрицы $A_j = \| a_{j\delta\tau} \|$ имеют размер $n+1$, а элементами их столбцов являются коэффициенты линейных неоднородных функций $a_{j\tau}, \ j = \overline{1, m}, \ \tau = \overline{1, n+1}.$

С учетом связей [11] между собственными числами и собственными векторами перестановочных матриц имеет место

Лемма 1. *Пусть* $\nu = \operatorname{colon}(\nu_1, \ldots, \nu_{n+1})$ — *общий собственный вектор матриц* $A_j, \ j = \overline{1, m}$. *Тогда линейная неоднородная функция*

$$p : x \to \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i + \nu_{n+1}, \quad \forall x \in \mathrm{R}^n \quad (\nu_\tau \in \mathrm{C}, \ \tau = \overline{1, n+1}\,) \qquad (4)$$

является частным интегралом якобиевой системы (1).

Доказательство. Функция (4) является частным интегралом системы (1), если и только если выполняется система тождеств

$$\mathfrak{I}_j p(x) = p(x)(-a_{j,n+1}(x) + \lambda^j), \quad \forall x \in \mathrm{R}^n, \quad \lambda^j \in \mathrm{C}, \ j = \overline{1,m}. \qquad (5)$$

Система тождеств (5) имеет место тогда и только тогда, когда совместна линейная однородная система

$$(A_j - \lambda^j E)\nu = 0, \ \ j = \overline{1,m}, \qquad (6)$$

где E— единичная матрица размера $n+1$, т. е. когда ν — общий собственный вектор матриц $A_j, \, j = \overline{1,m}.$ При этом $\lambda^j, \, j = \overline{1,m}$ — собственные числа матриц A_j, которым соответствует собственный вектор ν.

Систему

$$\det(A_j - \lambda^j E) = 0, \ \ j = \overline{1,m} \qquad (7)$$

будем называть интегральной характеристической системой, а ее корни — интегральными характеристическими корнями системы (1).

Заметим, что лемма 1 корректна, так как у матриц A_j элементы $a_{j,n+1,i}, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}$ одновременно не равны нулю, а значит, у матриц $A_j, \ j = \overline{1,m}$ нет собственного вектора $(0,\ldots,0,\nu_{n+1})$ при $\nu_{n+1} \neq 0.$

Действительно, если бы числа $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 0, \ \nu_{n+1} \neq 0$ были решением системы (6), где λ^j — собственные числа матриц $A_j, \ j = \overline{1,m},$ которым соответствует собственный вектор ν, то

$$a_{j,n+1,i} \ \nu_{n+1} = 0, \ \ i = \overline{1,n}, \ \ j = \overline{1,m}, \qquad \text{т. е.} \quad a_{j,n+1,i} = 0, \ \ i = \overline{1,n}, \ \ j = \overline{1,m},$$

что противоречит условию (2).

Таким образом, частные интегралы якобиевой системы (1) можно находить по матрицам коэффициентов $A_j, \, j = \overline{1,m}$ этой системы. Построение же первых интегралов якобиевой системы (1) будем вести на основании ее частных интегралов в следующих возможных случаях.

Случай простых вещественных интегральных характеристических корней

Введем обозначения:

$$\nu^k = (\nu_1^k, \ldots, \nu_{n+1}^k), \quad p_k(x) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i^k x_i + \nu_{n+1}^k.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* ν^k, $k=\overline{1,m+2}$ — *общие вещественные линейно независимые собственные векторы матриц* A_j, $j=\overline{1,m}$. *Тогда функция*

$$W: x \to \prod_{k=1}^{m+2} |\, p_k(x)|^{h_k}, \ \ \forall x \in X, \tag{8}$$

где вещественные числа h_k, $k=\overline{1,m+2}$ являются нетривиальным решением линейной однородной системы

$$\sum_{k=1}^{m+2} h_k = 0, \ \ \sum_{k=1}^{m+2} \lambda_k^j h_k = 0, \ \ j=\overline{1,m}, \tag{9}$$

коэффициенты которой λ_k^j, $k=\overline{1,m+2}$, $j=\overline{1,m}$ — *вещественные собственные числа матриц* A_j, $j=\overline{1,m}$, *которым соответствуют собственные векторы* ν^k, $k=\overline{1,m+2}$, *на любой области X из множества определения* $\mathrm{D}W$ *является первым интегралом якобиевой системы* (1).

Действительно, согласно лемме 1, линейные функции

$$p_k: x \to p_k(x), \ \ \forall x \in \mathrm{R}^n, \ \ k=\overline{1,m+2}$$

будут частными интегралами системы (1), при этом на R^n

$$\mathfrak{I}_j p_k(x) = p_k(x)(-a_{j,n+1}(x)+\lambda_k^j), \ \ j=\overline{1,m}, \ \ k=\overline{1,m+2}. \tag{10}$$

Тогда функция (8) при условии (9) будет первым интегралом на области X системы (1), так как ее производные Ли в силу системы (1) с учетом тождеств (10) на области X равны

$$\mathfrak{I}_j W(x) = \left(-a_{j,n+1}(x) \sum_{k=1}^{m+2} h_k + \sum_{k=1}^{m+2} \lambda_k^j h_k \right) W(x), \ \ j=\overline{1,m}.$$

Например, интегральный базис якобиевой системы

$$(-2x_1+7x_2+4-x_1(-7x_2-6))\partial_{x_1}u + (x_2 - x_2(-7x_2-6))\partial_{x_2}u +$$
$$+(3x_1-7x_2+x_3-4-x_3(-7x_2-6))\partial_{x_3}u = 0,$$
$$(-x_1+6x_2+2-x_1(-6x_2-3))\partial_{x_1}u + (3x_2 - x_2(-6x_2-3))\partial_{x_2}u +$$
$$+(4x_1-6x_2+3x_3-2-x_3(-6x_2-3))\partial_{x_3}u = 0$$

на любой области X, $X \subset \{x: x_2 \neq 0\} \subset \mathrm{R}^3$, образует функция

$$W: x \to \frac{x_1+x_3}{x_2},$$

построенная на основании теоремы 1 по общим собственным векторам

$$\nu^1 = (0,1,0,1),\quad \nu^2 = (1,0,0,1),\quad \nu^3 = (1,0,1,0),\quad \nu^4 = (0,1,0,0),$$

и соответствующим им собственным числам

$$\lambda_1^1 = -6,\ \lambda_2^1 = -2,\ \lambda_4^1 = \lambda_3^1 = 1;\quad \lambda_1^2 = -3,\ \lambda_2^2 = -1,\ \lambda_4^2 = \lambda_3^2 = 3.$$

Случай простых комплексных интегральных характеристических корней

Если полином (4) — комплекснозначный частный интеграл дифференциальной системы (1), то система тождеств (5) распадается на вещественную систему тождеств

$$\mathfrak{I}_j\ \operatorname{Re} p(x) = \operatorname{Re} p(x)(-a_{j,n+1}(x) + \hat{\lambda}^j) - \operatorname{Im} p(x)\tilde{\lambda}^j,$$

$$\mathfrak{I}_j\ \operatorname{Im} p(x) = \operatorname{Re} p(x)\ \tilde{\lambda}^j + \operatorname{Im} p(x)(-a_{j,n+1}(x) + \hat{\lambda}^j), \tag{11}$$

$$\forall x \in \mathrm{R}^n,\ \ \lambda^j = \hat{\lambda}^j + \tilde{\lambda}^j\, i,\ \ j = \overline{1,m}.$$

И имеет место

Лемма 2. *Линейная неоднородная функция* (4) *является комплекснозначным частным интегралом дифференциальной системы* (1) *тогда и только тогда*, *когда выполняется система тождеств* (11).

На основании леммы 2 устанавливаем

Свойство 1. *Если система* (1) *имеет комплекснозначный частный интеграл* (4), *то комплексно сопряженная функция* $\overline{p}$ *также является комплекснозначным частным интегралом системы* (1). *При этом*, *наряду с системой тождеств* (5), *имеет место система тождеств*

$$\mathfrak{I}_j \overline{p}(x) = \overline{p}(x)\Big(-a_{j,n+1}(x) + \overline{\lambda^j}\ \Big),\ \ \forall x \in \mathrm{R}^n,\ \ j = \overline{1,m},$$

где числа $\overline{\lambda^j},\ j = \overline{1,m}$ *комплексно сопряжены соответственно с числами* $\lambda^j,\ j = \overline{1,m}$ *из тождеств* (5).

Свойство 2. *Если система* (1) *имеет комплекснозначный частный интеграл* (4), *то полином* $P: x \to \operatorname{Re}^2 p(x) + \operatorname{Im}^2 p(x),\ \forall x \in \mathrm{R}^n$ *будет вещественным частным интегралом системы* (1), *причем*

$$\mathfrak{I}_j P(x) = 2P(x)(-a_{j,n+1}(x) + \hat{\lambda}^j),\ \ \forall x \in \mathrm{R}^n,\ \ j = \overline{1,m},$$

где *числа* $\lambda^j = \hat{\lambda}^j + \tilde{\lambda}^j\, i,\ j = \overline{1,m}$ *находим из тождеств* (5).

Свойство 3. *Пусть система* (1) *имеет комплекснозначный частный интеграл* (4). *Тогда для функции*

$$\varphi: x \to \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} p(x)}{\operatorname{Re} p(x)},\ \ \forall x \in X,$$

производные Ли в силу системы (1) *равны*

$$\mathfrak{I}_j\varphi(x)=\tilde{\lambda}^j, \quad \forall x\in X, \ j=\overline{1,m},$$

где числа $\lambda^j=\hat{\lambda}^j+\tilde{\lambda}^j\, i,\, j=\overline{1,m}$ *находим из тождеств* (5), *область* X *из пространства* $\mathbb{R}^n$ *не содержит нулей функции* $\operatorname{Re} p$.

Дополнительно введем обозначения:

$$\hat{p}_k(x)=\sum_{i=1}^{n}\hat{\nu}_i^k x_i+\hat{\nu}_{n+1}^k, \quad \tilde{p}_k(x)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{\nu}_i^k x_i+\tilde{\nu}_{n+1}^k,$$

$$P_k(x)=\hat{p}_k^2(x)+\tilde{p}_k^2(x), \quad \varphi_k(x)=\operatorname{arctg}\frac{\tilde{p}_k(x)}{\hat{p}_k(x)}.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть* ν_k, $\nu_\tau^k=\hat{\nu}_\tau^k+\tilde{\nu}_\tau^k\, i$, $\tau=\overline{1,n+1}$, $k=\overline{1,s}$, $s\le(m+2)/2$ и ν_θ, $\theta=\overline{s+1,m+2-s}$ — *соответственно общие линейно независимые комплексные* (*среди которых нет комплексно сопряженных*) *и вещественные собственные векторы матриц* A_j, $j=\overline{1,m}$. *Тогда первым интегралом на области* X *якобиевой системы* (1) *будет функция*

$$W: x\to\prod_{k=1}^{s}P_k^{\hat{h}_k}(x)\,\exp\bigl(-2\tilde{h}_k\varphi_k(x)\bigr)\prod_{\theta=s+1}^{m+2-s}|\,p_\theta(x)\,|^{h_\theta}, \qquad (12)$$

где X — *любая область из множества определения* $\mathrm{D}W$, *вещественные числа* $\hat{h}_k$, $\tilde{h}_k$, $k=\overline{1,s}$, *и* h_θ, $\theta=\overline{s+1,m+2-s}$ *составляют нетривиальное решение линейной однородной системы*

$$2\sum_{k=1}^{s}\hat{h}_k+\sum_{\theta=s+1}^{m+2-s}h_\theta=0,$$

$$2\sum_{k=1}^{s}\bigl(\hat{\lambda}_k^j\,\hat{h}_k-\tilde{\lambda}_k^j\,\tilde{h}_k\bigr)+\sum_{\theta=s+1}^{m+2-s}\lambda_\theta^j h_\theta=0, \ j=\overline{1,m}, \qquad (13)$$

где $\lambda_k^j=\hat{\lambda}_k^j+\tilde{\lambda}_k^j\, i$ *и* $\lambda_\theta^j\in\mathbb{R}$ — *собственные числа матриц* A_j, $j=\overline{1,m}$, *которым соответствуют собственные векторы* ν_k *и* ν_θ.

Доказательство. Согласно лемме 1 и свойству 1 функции

$$p_k: x\to\hat{p}_k(x)+\tilde{p}_k(x)\, i, \quad \overline{p_k}: x\to\hat{p}_k(x)-\tilde{p}_k(x)\, i, \quad p_\theta: x\to p_\theta(x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^n, \ k=\overline{1,s}, \ \theta=\overline{s+1,m+2-s}$$

являются частными интегралами системы (1).

Значит, на пространстве R^n выполняется система тождеств

$$\Im_j \hat{p}_k(x) = \hat{p}_k(x)(-a_{j,n+1}(x) + \hat{\lambda}_k^j) - \tilde{p}_k(x)\tilde{\lambda}_k^j, \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Im_j \tilde{p}_k(x) = \hat{p}_k(x)\ \tilde{\lambda}_k^j + \tilde{p}_k(x)(-a_{j,n+1}(x) + \hat{\lambda}_k^j), \tag{14}$$

$$\Im_j p_\theta(x) = (-a_{j,n+1}(x) + \lambda_\theta^j) p_\theta(x), \ \ j = \overline{1,m}, \ \ k = \overline{1,s}, \ \ \theta = \overline{s+1, m+2-s}.$$

Тогда функция (12) при условии (13) будет первым интегралом на области X системы (1), так как ее производные Ли в силу системы (1) с учетом тождеств (14) и свойств 2, 3 равны

$$\Im_j W(x) = \Bigg(-a_{j,n+1}(x)\left(2\sum_{k=1}^{s} \hat{h}_k + \sum_{\theta=s+1}^{m+2-s} h_\theta\right) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{s}\left(\hat{\lambda}_k^j\ \hat{h}_k - \tilde{\lambda}_k^j\ \tilde{h}_k\right) + \sum_{\theta=s+1}^{m+2-s} \lambda_\theta^j h_\theta \Bigg) W(x) = 0, \ \ \forall x \in X, \ j = \overline{1,m}.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\nu^{2k-1}, \ \nu^{2k}$ $\left(\nu_\tau^{2k-1} = \hat{\nu}_\tau^k + \tilde{\nu}_\tau^k\, i, \ \ \nu_\tau^{2k} = \hat{\nu}_\tau^k - \tilde{\nu}_\tau^k\, i, \ k = \overline{1,s}, \ s \le (m+1)/2, \ \tau = \overline{1,n+1}\right), \nu^{2s+1}\left(\nu_\tau^{2s+1} = \hat{\nu}_\tau^{2s+1} + \tilde{\nu}_\tau^{2s+1}\, i, \ \tau = \overline{1,n+1}\right)$ *и* $\nu^\theta, \theta = \overline{2s+2, m+2}$ *— соответственно общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц* $A_j, \, j = \overline{1,m}$. *Тогда первыми интегралами на области X якобиевой системы* (1) *будут функции*

$$W_1 : x \to \prod_{k=1}^{s} (P_k(x))^{\hat{h}_{2k-1} + \hat{h}_{2k}} \exp\left(-2\left(\tilde{h}_{2k-1} - \tilde{h}_{2k}\right)\varphi_k(x)\right) \times$$

$$\times (P_{2s+1}(x))^{\hat{h}_{2s+1}} \exp\left(-2\,\tilde{h}_{2s+1}\varphi_{2s+1}(x)\right) \prod_{\theta=2\mathrm{s}+2}^{\mathrm{m}+2} p_\theta^{2\hat{h}_\theta}(x), \tag{15}$$

и

$$W_2 : x \to \prod_{k=1}^{s} (P_k(x))^{\tilde{h}_{2k-1} + \tilde{h}_{2k}} \exp\left(2\left(\hat{h}_{2k-1} - \hat{h}_{2k}\right)\varphi_k(x)\right) \times$$

$$\times P_{2s+1}(x))^{\tilde{h}_{2s+1}} \exp\left(2\,\hat{h}_{2s+1}\varphi_{2s+1}(x)\right) \prod_{\theta=2\mathrm{s}+2}^{\mathrm{m}+2} p_\theta^{2\tilde{h}_\theta}(x), \tag{16}$$

где X — любая область из множества $\mathrm{D}W_1 \cap \mathrm{D}W_2$, *комплексные числа* $h_k = \hat{h}_k + \tilde{h}_k i, \ k = \overline{1, m+2}$ *составляют нетривиальное решение системы* (9), *в которой коэффициенты* $\lambda_{2k-1}^j = \hat{\lambda}_k^j + \tilde{\lambda}_k^j\, i, \lambda_{2k}^j = \hat{\lambda}_k^j - \tilde{\lambda}_k^j\, i, \ \ k = \overline{1,s}, \ \ \lambda_{2s+1}^j = = \hat{\lambda}_{2s+1}^j + \tilde{\lambda}_{2s+1}^j\, i$ *и* $\lambda_\theta^j, \, \theta = \overline{2s+2, m+2},$ *— соответственно комплексные и веще-*

ственные собственные числа матриц $A_j,\ j=\overline{1,m},$ *которым соответствуют собственные векторы* $\nu^k,\ k=\overline{1,m+2}.$

Доказательство. Построим две функции на области X:

$$\widehat{W}: x \to \prod_{k=1}^{s} p_k^{h_{2k-1}}(x)\ \overline{p_k}^{h_{2k}}(x)\cdot p_{2s+1}^{h_{2s+1}}(x) \prod_{\theta=2s+2}^{m+2} |\,p_\theta(x)|^{h_\theta},$$

$$\breve{W}: x \to \prod_{k=1}^{s} p_k^{\overline{h_{2k}}}(x)\ \overline{p_k}^{\overline{h_{2k-1}}}(x)\cdot \overline{p_{2s+1}}^{\overline{h_{2s+1}}}(x) \prod_{\theta=2s+2}^{m+2} |\,p_\theta(x)|^{\overline{h_\theta}},$$

где $h_k=\hat{h}_k+\tilde{h}_k i,\ k=\overline{1,m+2}$ — некоторые комплексные числа.

При условии (9) производные Ли в силу системы (1)

$$\mathfrak{I}_j\widehat{W}(x)=\mathfrak{I}_j\breve{W}(x)=0,\ \ \forall x\in X,\ j=\overline{1,m},$$

а значит, функции $\widehat{W}$ и $\breve{W}$ являются первыми комплекснозначными интегралами на области X якобиевой системы (1).

Положив

$$W_1(x)=\widehat{W}(x)\breve{W}(x),\ \ W_2(x)=(\widehat{W}(x))^{-i}(\breve{W}(x))^{i},\ \ \forall x\in X,$$

получим первые интегралы (15) и (16) соответственно.

Например, для якобиевой системы

$$\left(\frac{1}{2}x_1+x_2-x_1a_{14}(x)\right)\partial_{x_1}u+\left(-\frac{5}{4}x_1-\frac{1}{2}x_2-x_2a_{14}(x)\right)\partial_{x_2}u+$$

$$+\left(\frac{5}{8}x_1+\frac{3}{4}x_2+x_3+\frac{1}{2}-x_3a_{14}(x)\right)\partial_{x_3}u-x_4a_{14}(x)\partial_{x_4}u=0,$$

$$\big(2x_1+2x_2-x_1a_{24}(x)\big)\partial_{x_1}u+\left(-\frac{5}{2}x_1-x_2a_{24}(x)\right)\partial_{x_2}u+$$

$$+\left(\frac{5}{4}x_1+1-x_3a_{24}(x)\right)\partial_{x_3}u+\big(x_4-x_4a_{24}(x)\big)\partial_{x_4}u=0,$$

где $a_{14}: x\to -x_2-2x_3+1,\ a_{24}: x\to -2x_2-4x_3,\ \forall x\in \mathrm{R}^4,$ на основании собственных чисел

$$\lambda_1^1=i,\ \lambda_2^1=-i,\ \lambda_3^1=1+i,\ \lambda_4^1=1-i,\ \lambda_5^1=0;$$

$$\lambda_1^2=1+2i,\ \lambda_2^2=1-2i,\ \lambda_3^2=2i,\ \lambda_4^2=-2i,\ \lambda_5^2=1$$

и общих собственных векторов

$$\nu^1 = (1+2i, 2, 0, 0, 0), \quad \nu^2 = (1-2i, 2, 0, 0, 0), \quad \nu^3 = (0, i, 2i, 0, 1),$$

$$\nu^4 = (0, -i, -2i, 0, 1), \quad \nu^5 = (0, 0, 0, 1, 0)$$

строим (теоремы 2 и 3) базис первых интегралов на любой области X из множества $\{x : x_1 + 2x_2 \neq 0,\ x_4 \neq 0\}$ пространства $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 : x \to \operatorname{arctg}\frac{2x_1}{x_1 + 2x_2} - \operatorname{arctg}(x_2 + 2x_2), \qquad W_2 : x \to \frac{(x_1 + 2x_2)^2 + 4x_1^2}{x_4^2}.$$

Случай кратных интегральных характеристических корней

Из системы (1) произвольным образом выделим уравнение

$$\mathfrak{I}_\zeta(x)u = 0, \tag{1.ζ}$$

обладающее свойством: число элементарных делителей матрицы A_ζ не превосходит числа элементарных делителей каждой из матриц A_j, $j = \overline{1,m}$. При этом интегральным характеристическим уравнением линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных (1.ζ) является ζ-е уравнение интегральной характеристической системы (7).

Пусть собственному числу λ_l^ζ матрицы A_ζ соответствует собственный вектор $\nu^{0l} = (\nu_1^{0l}, \ldots, \nu_{n+1}^{0l})$ и элементарный делитель кратности s. Вектор $\nu^{kl} = (\nu_1^{kl}, \ldots, \nu_{n+1}^{kl})$, координатами которого являются решения системы

$$(A_\zeta - \lambda_l^\zeta E)\ \operatorname{colon}(\nu_1^{kl}, \ldots, \nu_{n+1}^{kl}) = k \cdot \operatorname{colon}(\nu_1^{k-1,l}, \ldots, \nu_{n+1}^{k-1,l}),\ k = \overline{1, s-1}, \tag{17}$$

назовем *k-м присоединенным вектором* матрицы A_ζ, соответствующим собственному числу λ_l^ζ.

Обозначим $\nu^{kl} = (\nu_1^{kl}, \ldots, \nu_{n+1}^{kl})$, $p_{kl}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i^{kl} x_i + \nu_{n+1}^{kl}$.

Т е о р е м а 4. *Пусть* ν^{0l} *и* $\nu^{\theta l}$, $\theta = \overline{1, s_l - 1}$, $l = \overline{1,r}$ *— общие линейно независимые вещественные собственные векторы матриц* A_j, $j = \overline{1,m}$ *и присоединенные векторы матрицы* A_ζ *соответствующие собственным числам* λ_l^ζ, $l = \overline{1,r}$, *имеющим элементарные делители кратности* s_l *при* $\sum\limits_{i=1}^{r} s_l \geq m+2$. *Тогда первым интегралом якобиевой системы* (1) *будет функция*

$$W : x \to \prod_{\xi=1}^{k} |\, p_{0\xi}(x)|^{h_{0\xi}}\ \exp\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} h_{q\xi} w_{q\xi}(x), \quad \forall x \in X, \tag{18}$$

где X — любая область из DW, функции $w_{q\xi}: X \to \mathrm{R},\ q=\overline{1,\varepsilon_\xi},\ \ \xi=\overline{1,k}$ *таковы, что в каждой точке области X*

$$p_{i\xi}(x)=\sum_{q=1}^{i}\binom{i-1}{q-1} w_{q\xi}(x)p_{i-q,\xi}(x),\ i=\overline{1,\varepsilon_\xi},\ \ \xi=\overline{1,k},$$

и

$$\sum_{\tau=1}^{k}(s_\tau+1)=m+2,\ \ \varepsilon_\xi\le s_\xi-1,\ \ \xi=\overline{1,k},\ \ k\le r.$$

При этом функции-решения $w_{q\xi}$ *такие, что* $\Im_j w_{q\xi}(x)=\mu_{q\xi}^j,\ \forall x\in X,$ $\mu_{q\xi}^j=\mathrm{const},\ \ q=\overline{1,\varepsilon_\xi},\ \ j=\overline{1,m},\ \xi=\overline{1,k},$ *а числа* $h_{q\xi},\ q=\overline{0,\varepsilon_\xi},\ \xi=\overline{1,k}$ *составляют нетривиальное решение линейной однородной системы*

$$\sum_{\xi=1}^{k}h_{0\xi}=0,\quad \sum_{\xi=1}^{k}\left(\lambda_\xi^j\ h_{0\xi}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^j\ h_{q\xi}\right)=0,\ \ j=\overline{1,m},$$

где λ_ξ^j *— вещественные собственные числа матриц* $A_j,\ j=\overline{1,m},$ *которым соответствуют собственные векторы* $\nu^{0\xi},\ \ \xi=\overline{1,k}.$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 в работе [4], если учесть, что на основании тождеств (17) и леммы 1 производные Ли на R^n в силу системы (1)

$$\Im_\zeta p_{\theta\, l}(x)=p_{\theta\, l}(x)\big(-a_{\zeta,n+1}(x)+\lambda_l^\zeta\big)+\theta\cdot p_{\theta-1,l}(x),\ \ \theta=\overline{1,s_l-1},\ \ l=\overline{1,r}.$$

Например, для якобиевой системы

$$(x_2-x_1(-x_1+2x_3+2))\partial_{x_1}u+(2x_2-x_3-1-x_2(-x_1+2x_3+2))\partial_{x_2}u+$$

$$+(x_1-1-x_3(-x_1+2x_3+2))\partial_{x_3}u=0,$$

$$(2x_1-x_3-x_1(x_2-3x_3+1))\partial_{x_1}u+(-x_1+2x_2+1-x_2(x_2-3x_3+1))\partial_{x_2}u+$$

$$+(-x_1+3x_3+1-x_3(x_2-3x_3+1))\partial_{x_3}u=0$$

по собственному числу $\lambda_1^1=1$ с четырехкратным элементарным делителем $(\lambda_1^1-1)^4$, собственному вектору $\nu^0=(-1,1,-1,0)$ и присоединенным векторам $\nu^1=(1,0,-1,-1),\ \nu^2=(1,-1,3,0),\ \nu^3=(-3,0,9,9)$ строим на любой области X из множества $V=\{x:-x_1+x_2-x_3\ne 0\}$ функции

$$w_1: x\to\frac{x_1-x_3-1}{-x_1+x_2-x_3},$$

$$w_2 : x \to \frac{(x_1 - x_2 + 3x_3)(-x_1 + x_2 - x_3) - (x_1 - x_3 - 1)^2}{(-x_1 + x_2 - x_3)^2},$$

$$w_3 : x \to \frac{1}{(-x_1 + x_2 - x_3)^3}\big((-3x_1 + 9x_3 + 9)(-x_1 + x_2 - x_3)^2 -$$

$$-3(-x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_3 - 1)(x_1 - x_2 + 3x_3) + 2(x_1 - x_3 - 1)^3\big).$$

По теореме 4 функция w_2 образует на любой области *X* из *V* интегральный базис этой дифференциальной системы.

Возможна ситуация, когда матрицы A_j $j = \overline{1, m}$ имеют некоторое число общих комплексных собственных векторов ν^{0l}, которые соответствуют собственным числам λ_l^{ζ} с элементарными делителями кратности s_l.

В этом случае, по теореме 4 (достаточно опустить знак модуля в (18) для комплекснозначных функций p_{0l}), получим первый интеграл якобиевой системы (1), который, вообще говоря, будет комплекснозначным. Тогда как и в теоремах 2, 3 для случая простых интегральных характеристических корней, на основании группировки *m* + 2 функций w_{ql}, $q = \overline{0, \varepsilon_l}$, $l = \overline{1, r}$ получаем вещественные первые интегралы якобиевой системы (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л.; М., 1934. С. 70.

2. *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.; Л., 1936. Т. 2. С. 523.

3. *Горбузов В. Н.* Построение первых интегралов и последних множителей полиномиальных автономных многомерных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 4. С. 562–564.

4. *Горбузов В. Н., Проневич А. Ф.* Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных // Дифференц. уравнения и процессы управления (http:// www.neva.ru). 2001. № 3. С. 17–45.

5. *Горбузов В. Н., Проневич А. Ф.* Интегралы **R**-линейных систем в полных дифференциалах // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 1. С. 49–52.

6. *Буслюк Д. В.* Интегралы и последние множители дифференциальных систем в частных производных // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 3. С. 418–419.

7. *Буслюк Д. В., Горбузов В. Н.* Интегралы системы Якоби в частных производных // Вестник Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. 2000. № 1. С. 4–11.

8. *Буслюк Д. В.* Интегралы и последние множители дифференциальных систем уравнений в частных производных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Гродно, 2000.

9. *Горбузов В. Н.* Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru). 2000. № 2. С. 1–36.

10. *Гайшун И. В.* Линейные уравнения в полных производных. Минск, 1989. С. 24.

11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1988. С. 191–194.

V. Gorbuzov, S. Daranchuk

**THE INTEGRAL BASIS
OF JACOBI-HESSE PARTIAL DIFFERENTIAL SYSTEM**

A spectral method of building the integral basis of Jacobian linear homogeneous partial differential Jacobi—Hesse system is elaborated.