С. В. Жестков, А. А. Романенко

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ СЕМЕЙСТВА МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ КОРТЕВЕГА ДЕ-ФРИЗА

(Работа поддержана INTAS, грант № 03–51–4872)

В работе развит численно-аналитический метод построения трехмерных солитонов для нелинейных уравнений в частных производных типа Кортевега де-Фриза.

Известно, что построение и анализ трехмерных солитонов является одной из актуальных проблем современной теории солитонов. Эта проблема связана с тем обстоятельством, что известные методы построения солитонных решений, такие как метод обратной задачи рассеяния и метод Хироты, сталкиваются со значительными трудностями. Поэтому развитие численно-аналитических методов является важной и актуальной задачей в теории многомерных солитонов.

Известно [1], что трехмерный солитон уравнения Кортевега де-Фриза (КДФ) был построен численно. Вопросы аналитического построения и математического обоснования существования трехмерных солитонов для уравнения КДФ и его модификаций в общем случае остаются открытыми.

В настоящей работе исследуется семейство обобщенных модифицированных уравнений КДФ вида

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+a_1\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}+a_2\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z\partial x^2}+a_3\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z\partial y^2}+a_4\frac{\partial}{\partial z}(\Phi^{2m+1})+a_5\frac{\partial}{\partial z}(\Phi^{4m+1})=0\,, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 -$ произвольные действительные числа, а $m>0$.

Решение уравнения (1) будем строить в виде

$$\Phi = u(x, y, \xi_z), \qquad \xi_z = z - ct\,, \qquad (2)$$

где c —скорость волны в направлении оси **z**. Подставив (2) в (1), получим

$$-c\frac{\partial u}{\partial \xi_z}+a_1\frac{\partial^3 u}{\partial \xi_z^3}+a_2\frac{\partial^3 u}{\partial \xi_z\partial x^2}+a_3\frac{\partial^3 u}{\partial \xi_z\partial y^2}+a_4\frac{\partial}{\partial \xi_z}(u^{2m+1})+a_5\frac{\partial}{\partial \xi_z}(u^{4m+1})=0. \qquad (3)$$

Проинтегрировав один раз уравнение (3) и положив константу интегрирования равной нулю, найдем

$$-cu + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_z^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_4 u^{2m+1} + a_5 u^{4m+1} = 0 . \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) будем строить в виде $u = v(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$, $\xi_x = k_1 x$, $\xi_y = k_2 y$, где константы k_1, k_2 удовлетворяют соотношению

$$a_2 k_1^2 = a_3 k_2^2 = a_1 .$$

Тогда для функции v получим следующее уравнение:

$$\Delta v = pv - qv^{2m+1} - \varepsilon v^{4m+1}, \quad p = \frac{c}{a_1}, \quad q = \frac{a_4}{a_1}, \quad \varepsilon = \frac{a_5}{a_1}, \qquad (5)$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_z^2} .$$

Рассмотрим вопрос о существовании сферически симметричного солитона, который подчиняется уравнению

$$\Delta v = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = pv - qv^{2m+1} - \varepsilon v^{4m+1}, \qquad r = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} . \qquad (6)$$

Известно [1], что для такого солитона должны выполняться условия

$$v(+\infty) = 0, \qquad v'(+\infty) = 0 . \qquad (7)$$

Вопрос о существовании нетривиального решения задачи (6), (7) в строгой постановке является открытым.

Предположим, что при достаточно больших r можно пренебречь членом $(2/r)v'(r)$ по сравнению с $v''(r)$ в уравнении (6). Тогда оно примет вид

$$\frac{d^2 v}{dr^2} = pv - qv^{2m+1} - \varepsilon v^{4m+1} . \qquad (8)$$

Проинтегрировав уравнение (8) с учетом условий (7), найдем

$$v = \left[4pe \left(\left(\frac{q}{m+1} + e \right)^2 + \frac{4p\varepsilon}{2m+1} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2m}}, \quad e \equiv \exp\left\{ -2\sqrt{p}mr \right\}, \quad p > 0 . \qquad (9)$$

Анализ выражения (9) показывает, что параметр q может быть любого знака и может обращаться в нуль. Параметр ε может быть положительным и может обращаться в нуль, кроме того, он может быть и отрицательным при условии

$$q > 0, \qquad \frac{q^2}{(m+1)^2} > \frac{4p|\varepsilon|}{2m+1}.$$

Функцию (9) можно принять за асимптотику солитона, так как она удовлетворяет условиям (7) и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{(2/r)v'(r)}{v''(r)} = 0.$$

Пусть r_* — точка из $[0,+\infty)$ такая, что при $r \ge r_*$ можно использовать асимптотическое представление (9). Тогда решение уравнения (6) можно продолжить гладким образом до точки $r = 0$, начиная с решения следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = pv - qv^{2m+1} - \varepsilon\, v^{4m+1}, \\ &v(r_*) = a, \qquad v'(r_*) = b, \end{aligned} \tag{10}$$

где *a, b* — значения асимптотической функции (9) и ее производной в точке r_*. Задача (10) эквивалентна интегральному уравнению

$$\begin{aligned} v(r) = a + br_*^2\left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\int_{r_*}^{r} s^2\left(pv(s) - qv^{2m+1}(s) - \varepsilon\, v^{4m+1}(s)\right)ds + \\ + \int_{r_*}^{r} s\left(pv(s) - qv^{2m+1}(s) - \varepsilon\, v^{4m+1}(s)\right)ds. \end{aligned} \tag{11}$$

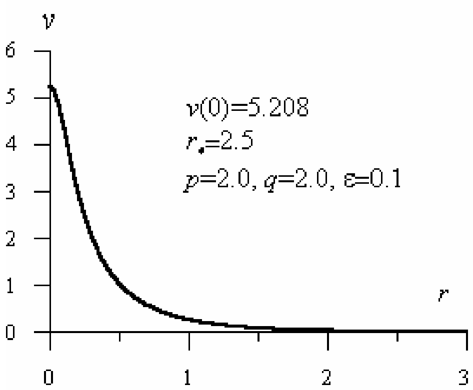
Применив к выражению (11) принцип сжимающих отображений [2], получим следующий результат. Пусть выполнены условия:

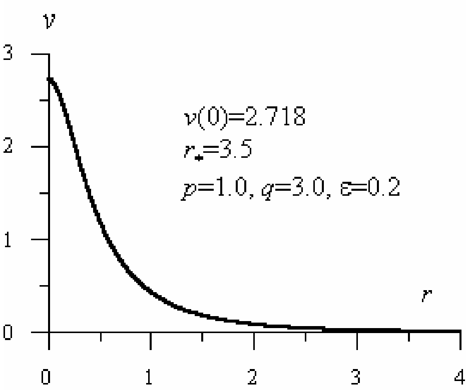
$$\left[p + (2m+1)|q|R^{2m} + (4m+1)|\varepsilon|R^{4m}\right]\left[\frac{1}{3r}\left|r^3 - r_*^3\right| + \frac{1}{2}\left|r^2 - r_*^2\right|\right] < 1,$$

$$a + |b|r_*\frac{|r - r_*|}{r} + \left[pR + |q|R^{2m+1} + |\varepsilon|R^{4m+1}\right]\left[\frac{1}{3r}\left|r^3 - r_*^3\right| + \frac{1}{2}\left|r^2 - r_*^2\right|\right] \le R.$$

Тогда в области $|r - r_*| \le \delta,\ \ 0 \le v \le R$, где δ — достаточно малое число, а R — конечное число, уравнение (11) имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений или численно.

Продолжая этот процесс, за конечное число шагов можно численно построить решение уравнения (6) на отрезке $[0, r_*]$. При этом значение $v(0)$ подбирается так, чтобы график трехмерного солитона на отрезке $[0, r_*]$ гладким образом переходил в график асимптотической функции (9). Отметим, что в точке $r = 0$ должно выполняться условие $v'(0) = 0$. На рисунке представлены графические зависимости $v(r)$ решения задачи (6)–(7) для двух наборов параметров p, q, ε и $m = 1$.





Для уравнения (5) можно построить трехмерный плоский солитон. Действительно, будем строить решение в виде

$$v = \psi(\xi), \qquad \xi = \varepsilon_1 \xi_x + \varepsilon_2 \xi_y + \varepsilon_3 \xi_z\,, \tag{12}$$

где ε_1, ε_2, ε_3, — произвольные действительные числа. Подставив (12) в (5), получим

$$\psi''(\xi)\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2\right) = p\psi - q\psi^{2m+1} - \varepsilon\,\psi^{4m+1}\,. \tag{13}$$

Положим, что $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1$. Тогда уравнение (13) совпадает с уравнением (8). А это значит, что при $\xi \ge 0$ трехмерный плоский солитон совпадает с асимптотикой сферически симметричного солитона.

Отметим, что в работе [3] исследовано трехмерное обобщенное уравнение КДФ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.* О трехмерных солитонах // ЖЭТФ. 1974. Вып. 2. С.594–597.

2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

3. *Волосевич А. В., Жестков С. В., Романенко А. А.* О существовании трехмерных солитонов обобщенного уравнения КДФ // Оптика неоднородных структур: Материалы республиканской научно-практической конференции. Могилев, 2004. С.86–90.

S. Jestokov, A. Romanenko

A NUMERICAL ANALYTICAL METHOD FOR CONSTRUCTING THREE DIMENSIONAL SOLITONS OF MODIFIED EQUATIONS OF KORTEWEG DE-VRIES

A numerical analytical method for constructing three-dimensional solitons for nonlinear partial differential equations of Korteweg de-Vries type is developed.