УДК 532.591

С. И. Перегудин

ЗАДАЧА О ВОЛНАХ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

В работе рассматриваются две частные задачи гидродинамики и теории волн — непотенциальное движение идеальной несжимаемой неоднородной жидкости над твердым и деформируемым дном. Представленная математическая модель аналитически реализована в линейной аппроксимации. Полученное решение позволяет определить волновой режим исследуемой акватории.

В естественных условиях достаточно редки случаи, когда поверхность дна канала сохраняет свою первоначальную форму и остается твердой, непроницаемой и недеформируемой. В результате движения жидкости на дно оседают взвеси органического и неорганического происхождения. С течением времени на изначально твердом горизонтальном дне канала образуется подвижный деформируемый слой, представляющий собой смесь, компонентами которой являются песок, ил, глина или гравий. В результате воздействия потока жидкости поверхность раздела жидкого и донного слоев принимает волнообразную форму.

Вопрос о возникновении и движении песчаных волн изучается гидродинамиками с начала XX века. Изначально данная задача рассматривалась экспериментально [2], в результате чего была установлена предельная зависимость между скоростью потока жидкости и скоростью движения песчаных волн. Первое теоретическое обоснование рассматриваемого вопроса принадлежит Экснеру [1–3, 8], в его работах выведено уравнение, связывающее твердый расход с формой донной поверхности, и сформулирована гипотеза о линейной зависимости твердого расхода от придонной скорости. В работах [2, 3] эта гипотеза обобщается на случай произвольной зависимости расхода донного вещества от придонной скорости.

Ф. И. Франкль рассмотрел задачу о плоском движении песчаных волн с учетом гидродинамики водного слоя, предполагая движение невозмущенного потока потенциальным с постоянной скоростью, а сами возмущения считая величинами малыми [8]. В статье Ю. З. Алешкова [1] рассмотрен более общий случай — непотенциальное движение слоя неоднородной жидкости над сыпучей средой. В работе [5] рассмотрен случай потенциального движения одного и двух слоев идеальной несжимаемой однородной жидкости над дном, состоящим из сыпучего вещества, в работе [6] изучен процесс распространения внутренних волн в канале переменой глубины с недеформируемым основанием.

Общеизвестные трудности исследования задач теории поверхностных и внутренних гравитационных волн связаны, в первую очередь, с существенной нелинейностью граничных условий на свободной поверхности и поверхности раздела, а также с тем, что сами эти поверхности суть функции неизвестные и подлежат определению.

Кроме того, если дно имеет неровности, краевое условие непротекания через дно будет линейным, но с переменными по горизонтальным координатам коэффициентами, если же дно деформировано, то — и по времени. Учет граничных условий соприкосновения тел с жидкостью также вносит существенные трудности. Поэтому нелинейная модель теории внутренних и поверхностных гравитационных волн не получила разрешения, несмотря на усилия выдающихся ученых на протяжении двух столетий.

Указанные трудности настолько существенны, что в результате получило большое развитие построение и приложение упрощенных волновых моделей, которое ведет свое начало от исследований Лагранжа.

2. Основные уравнения и граничные условия

Рассмотрим задачу о движении двух слоев идеальной тяжелой несжимаемой жидкости над деформируемым дном. Смоделируем рассматриваемую среду как трехслойную — два слоя неоднородной жидкости, грунт. Нижняя жидкость имеет плотность ρ_1, верхняя — ρ_2. На поверхности раздела водных слоев образуются волны. При движении нижнего слоя происходит взаимодействие жидкости с грунтом, частицы донного слоя при этом также приходят в движение.

Расположим декартову прямоугольную систему координат таким образом, что плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью раздела водных слоев, ось z направлена вертикально вверх. Толщина верхнего слоя в невозмущенном состоянии — H_2, нижний слой в предположении горизонтального дна имеет высоту H_0. Свободная поверхность в текущий момент времени t имеет вид $z = H_2 + \eta_2(x, y, t)$, поверхность раздела водных слоев — $z = \eta_1(x, y, t)$, поверхность раздела жидкость—грунт — $z = -H(x, y, t) = -H_0 + \eta(x, y, t)$. Подвижный слой ограничен снизу твердым недеформируемым дном $z = -H_1$, $(H_1 > H_0)$. В момент времени t скорость каждого слоя жидкости $(u_j, v_j, w_j) = (\mathbf{v}_{jh}, w_j)$, $j = 1,2$, давление $p_j(x, y, z, t)$.

Рассмотрим элементарный объем V части сыпучего слоя, ограниченный боковыми гранями с линейными размерами Δx, Δy, снизу — твердым недеформируемым дном $z = -H_1$, сверху — поверхностью раздела $z = -H_0 + \eta(x, y, t)$:

$$V = \left\{(x, y, z) \in R^3; (x, y) \in [x; x + \Delta x] \times [y; y + \Delta y], z \in [-H_1; -H_0 + \eta(x, y, t)]\right\},$$

$$S = \partial V = S_{(-H_1)} \cup S_{(-H_o+\eta)} \cup S_y \cup S_{(y+\Delta y)} \cup S_x \cup S_{(x+\Delta x)}.$$

В данном объеме содержится масса грунта

$$m(t) = \iiint\limits_V \rho(x, y, z, t)\, dxdyxz,$$

$\rho(x, y, z, t)$ — плотность грунта в точке (x, y, z) в момент времени t. Изменение этой массы за время Δt в предположении однородности донного вещества составит

$$\Delta m(t) = \frac{\partial m}{\partial t} \Delta t = \rho \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\eta(x, y, t + \Delta t) - \eta(x, y, t)}{\Delta t} \Delta t \cdot \Delta x \Delta y . \quad (2.1)$$

Для определенности положим, что за рассматриваемый промежуток времени произошло увеличение массы, то есть $\Delta m > 0$. Данное изменение массы вызвано изменением расхода вещества через поверхность S за время Δt. Так как $z = -H_1$ — поверхность твердого недеформируемого дна, расход вещества через поверхность $S_{(-H_1)}$ равен нулю. Согласно литературе [1], расход через поверхность $S_{(-H_0+\eta)}$ также обращается в ноль. Обозначив скорость перемещения грунта через $\mathbf{v}^l(x, y, z, t)$, получим

$$\Delta m(t) = \rho \int\limits_{-H_1}^{-H_0+\eta(x,y,t)} \left[\int\limits_{y}^{y+\Delta y} \left(v_x^{\,l}(x, \tau_1, \tau_2, t) - v_x^{\,l}(x + \Delta x, \tau_1, \tau_2, t) \right) d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \left(v_y^{\,l}(\tau_1, y, \tau_2, t) - v_x^{\,l}(\tau_1, y + \Delta y, \tau_2, t) \right) d\tau_1 \right] d\tau_2 \Delta t.$$

Принимая во внимание малость Δx, Δy, а соответственно и ΔS, увеличение массы представим в виде

$$\Delta m(t) = -\rho \int\limits_{-H_1}^{-H_0+\eta(x,y,t)} \Big[\Big(v_x^{\,l}(x+\Delta x, \tau_1, \tau_2, t) - v_x^{\,l}(x, \tau_1, \tau_2, t) \Big) \Delta y + \\ + \Big(v_y^{\,l}(\tau_1, y+\Delta y, \tau_2, t) - v_y^{\,l}(\tau_1, y, \tau_2, t) \Big) \; \Delta x \Big] d\tau_2 \cdot \Delta t. \tag{2.2}$$

Приравняв выражения (2.1) и (2.2), получим уравнение неразрывности для однородного донного слоя

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{Q} = 0\,,$$

где $\mathbf{Q}(x, y, t)$ — расход донного вещества (твердый расход) [3],

$$Q_x = \int\limits_{-H_1}^{-H_0+\eta(x,y,t)} v_x^l(x, y, \tau_2, t)\, d\tau_2, \qquad Q_y = \int\limits_{-H_1}^{-H_0+\eta(x,y,t)} v_y^l(x, y, \tau_2, t)\, d\tau_2.$$

Для определения расхода $\mathbf{Q}$ необходимо знать реологию грунта. Согласно гипотезе М. А. Великанова [1–3, 8], предположим произвольную функциональную зависимость твердого расхода от горизонтальной составляющей придонной скорости $\mathbf{v}_1^b(x, y, t) = \mathbf{v}_1^b(x, y, z, t)\big|_{z=-H_0+\eta(x,y,t)} = \left(u_1^b, v_1^b\right)(x, y, t)$, то есть

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\left(u_1^b, v_1^b\right).$$

Движение идеальной несжимаемой неоднородной жидкости в слое описывается уравнениями [1]

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla \rho_j = 0, \qquad \mathrm{div}\, \mathbf{v}_j = 0, \qquad \rho_j \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_j}{\mathrm{d}t} = \mathbf{g}\rho_j - \nabla p_j, \qquad \mathbf{g} = (0, 0, -g) \tag{2.3}$$

с соответствующими граничными условиями: на поверхности раздела жидкость—грунт [2, 5]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v}_{1h} \cdot \nabla \eta = w_1, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0, \qquad z = -H_0 + \eta(x, y, t), \tag{2.4}$$

на поверхности раздела жидких сред

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \mathbf{v}_{jh} \cdot \nabla \eta = w_j, \qquad p_1 = p_2, \qquad z = \eta_1(x, y, t) \tag{2.5}$$

и на твердой крышке

$$v_{2z} = 0, \qquad z = H_2. \tag{2.6}$$

Задача состоит в определении функций $\mathbf{v}_j, \rho_j, p_j$, удовлетворяющих уравнению (2.3) с граничными условиями (2.4)–(2.6). Если данная задача решена, уравнения свободной поверхности и поверхностей раздела можно определить из граничных условий.

3. Задача о волнах малой амплитуды в канале с деформируемым основанием

Уравнения движения (2.3) с учетом граничных условий (2.4)–(2.6) имеют решение

$$\rho_j = \tilde{\rho}_j(z),\ p_j = \tilde{p}_j(z),\ \mathbf{v}_{jst} = \left(u_j, v_j, 0\right)(z),\ \eta = 0,\ \eta_1 = 0,\ \rho_j g + \frac{\partial p_j}{\partial z} = 0. \qquad (3.1)$$

При этом $\tilde{\rho}_j(z), \tilde{p}_j(z),\ \mathbf{v}_{jst}(z)$ — произвольно заданные функции, а твердый расход [1] $\mathbf{Q}$ — постоянен.

Представим движение жидкости в виде возмущения, наложенного на горизонтальный поток (3.1)

$$\rho_j = \tilde{\rho}_j(z) + \rho'_j,\ p_j = \tilde{p}_j(z) + p'_j,\ \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{jst} + \mathbf{v}'_j,\ \mathbf{v}'_j = \left(v'_{jx}, v'_{jy}, v'_{jz}\right),\ \eta = \eta',\ \eta_1 = \eta'_1.$$

Рассмотрим исходную задачу для возмущенного движения

$$\frac{\partial \rho'_j}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_{jst} + \mathbf{v}'_j\right) \cdot \nabla\left(\tilde{\rho}_j + \rho'_j\right) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}'_j = 0,\ \left(\tilde{\rho}_j + \rho'_j\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{v}_{jst} + \mathbf{v}'_j\right) = \rho_j \mathbf{g} - \nabla p_j,$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \left(u_1(z) + v'_{1x}\right)\frac{\partial \eta'}{\partial x} + \left(v_1(z) + v'_{1y}\right)\frac{\partial \eta'}{\partial y} = v'_{1z}, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0,$$

$$z = -H_0 + \eta(x, y, t),$$

$$\frac{\partial \eta'_1}{\partial t} + \left(u_j(z) + v'_{jx}\right)\frac{\partial \eta'_1}{\partial x} + \left(v_j(z) + v'_{jy}\right)\frac{\partial \eta'_1}{\partial y} = v'_{jz}, \quad g\left(\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1\right)\eta'_1 + p'_1 - p'_2 = 0,$$

$$z = \eta_1(x, y, t), \quad v'_{2z} = 0, \quad z = H_2.$$

Рассматриваемая краевая задача для случая волн малой амплитуды примет вид

$$\frac{\partial \rho'_j}{\partial t} + u_j(z)\frac{\partial \rho'_j}{\partial x} + v_j(z)\frac{\partial \rho'_j}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}\,\tilde{\rho}_j}{\mathrm{d}\,z} v'_{jz} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}'_j = 0,$$

$$\tilde{\rho}_j(z)\left[\frac{\partial \mathbf{v}'_j}{\partial t} + u_j(z)\frac{\partial \mathbf{v}'_j}{\partial x} + v_j(z)\frac{\partial \mathbf{v}'_j}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}_{jst}}{\mathrm{d}\,x}\mathbf{v}'_j\right] = \mathbf{g}\rho'_j - \nabla p',$$

$$\frac{\partial\eta'}{\partial t}+u_1(z)\frac{\partial\eta'}{\partial x}+v_1(z)\frac{\partial\eta'}{\partial y}=v'_{1z},\quad \frac{\partial\eta'}{\partial t}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=0,\qquad z=-H_0,$$

$$\frac{\partial\eta'_1}{\partial t}+u_j(z)\frac{\partial\eta'_1}{\partial x}+v_j(z)\frac{\partial\eta'_1}{\partial y}=v'_{jz},\quad g\left(\tilde\rho_2-\tilde\rho_1\right)\eta'_1+p'_1-p'_2=0,\qquad z=0,$$

$$v'_{2z}=0,\quad z=H_2.$$

Учитывая предположение о произвольной зависимости **Q** от придонной скорости [1, 8], граничное условие на дне, связывающее форму его поверхности с твердым расходом, примет вид

$$\frac{\partial\eta'}{\partial t}+\left(\kappa_{11}b_1+\kappa_{12}b_2\right)\frac{\partial\eta'}{\partial x}+\left(\kappa_{21}b_1+\kappa_{22}b_2\right)\frac{\partial\eta'}{\partial y}+\kappa_{11}\frac{\partial v'_{1x}}{\partial x}+\kappa_{12}\frac{\partial v'_{1y}}{\partial x}+$$

$$+\kappa_{21}\frac{\partial v'_{1x}}{\partial y}+\kappa_{22}\frac{\partial v'_{1y}}{\partial y}=0,\qquad z=-H_0,$$

$$\begin{pmatrix}\kappa_{11}&\kappa_{12}\\ \kappa_{21}&\kappa_{22}\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial Q_x}{\partial v_{1x}}&\dfrac{\partial Q_x}{\partial v_{1y}}\\[2mm] \dfrac{\partial Q_y}{\partial v_{1x}}&\dfrac{\partial Q_y}{\partial v_{1y}}\end{pmatrix}\right|_{\left(u_1(-H_0),\,v_1(-H_0)\right)},\qquad \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\,u_1(z)}{\mathrm{d}\,z}\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\,v_1(z)}{\mathrm{d}\,z}\end{pmatrix}\right|_{z=-H_0}.$$

Рассмотрим решение в виде бегущей волны с частотой ω и волновым числом $\mathbf{k}=\left(k_1,k_2\right)$:

$$\left\{\rho'_j,p'_j,v'_{jx},v'_{jy},v'_{jz},\eta',\eta'_1\right\}=\left\{R_j,P_j,V_{jx},V_{jy},V_{jz},A,B\right\}e^{i\left(k_1x+k_2y-\omega t\right)}.$$

Для определения соответствующих амплитуд имеем уравнения

$$ir_j(z)R_j(z)+\frac{\mathrm{d}\,\tilde\rho_j}{\mathrm{d}\,z}V_{jz}(z)=0,\qquad i\left(k_1V_{jx}(z)+k_2V_{jy}(z)\right)+V'_{jz}(z)=0,$$

$$\tilde\rho_j\left[ir_j(z)V_{jx}(z)+\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}z}V_{jz}(z)\right]=-ik_1P_j(z),\quad \tilde\rho_j\left[ir_j(z)V_{jy}(z)+\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}z}V_{jz}(z)\right]=-ik_2P_j(z),\quad (3.2)$$

$$ir_j(z)\tilde\rho_j(z)V_{jz}(z)=-gR_j(z)-P'_j(z),\qquad r_j(z)=k_1u_j(z)+k_2v_j(z)-\omega$$

с граничными условиями

$$ir_1(z)A=V_{1z}(z)=0,\qquad \left(s_1-\omega\right)A+s_2V_{1x}(z)+s_3V_{1y}(z)=0,\qquad z=-H_0,$$

$$ir_j(z)B=V_{jz}(z),\qquad g\left(\tilde\rho_2-\tilde\rho_1\right)B+P_1(z)-P_2(z)=0,\qquad z=0,\qquad (3.3)$$

$$V_{2z}=0,\qquad z=H_2,$$

$$s_1=k_1\theta_1+k_2\theta_2,\qquad s_2=k_1\kappa_{11}+k_2\kappa_{21},\qquad s_3=k_1\kappa_{12}+k_2\kappa_{22},\qquad \theta_j=\kappa_{j1}b_1+\kappa_{j2}b_2.$$

В результате преобразований уравнений (3.2) с граничными условиями (3.3) получим краевую задачу для функции $w_j(z) = V_{jz}(z)$:

$$r_j^2(z)\left(w_j''(z) - 2\alpha_j w_j'(z)\right) - \left(|\mathbf{k}|^2 r_j^2(z) + r_j(z)\left(r_j''(z) - 2\alpha_j r_j'(z)\right) - |\mathbf{k}|^2 N_j^2(z)\right) w_j(z) = 0,$$

$$r_j(z)\left(k_1 s_2 + k_2 s_3\right) w_1'(z) = \left(|\mathbf{k}|^2 \left(s_1 - \omega\right) + \left(k_2 s_2 - k_1 s_3\right)\left(k_1 v'(z) - k_2 u'(z)\right)\right) w_1(z), \quad z = -H_0,$$

$$r_2 w_1(z) = r_1 w_2(z), \quad \tilde{\rho}_1 r_1 w_1'(z) - \left[\tilde{\rho}_1 r_1' + \frac{g|\mathbf{k}|^2}{r_1}\left(\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_2\right)\right] w_1(z) = \tilde{\rho}_2\left(r_2 w_2'(z) - r_2' w_2(z)\right),$$

$$z = 0, \quad w_2(z) = 0, \quad z = H_2, \qquad N_j^2(z) = -g\frac{\tilde{\rho}_j'(z)}{\tilde{\rho}_j(z)}, \quad 2\alpha_j = \frac{1}{g} N_j^2.$$

В результате замены

$$w_j(z) = V_j(z)\exp\left(-\int_{-H_0}^{z} \alpha_j(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi\right)$$

для функции $V_j(z)$ получим уравнение

$$V_j''(z) + q_j(z) V_j(z) = 0,$$

$$q_j(z) = \alpha_j' - \alpha_j'^2 - |\mathbf{k}|^2 - \frac{r_j''(z) - 2\alpha_j r_j'(z)}{r_j(z)} + 2\frac{g|\mathbf{k}|^2}{r_j^2(z)}\alpha_j'$$

с граничными условиями

$$\beta_1 V_1'(z) = \beta_2 V_1(z), \quad z = -H_0, \qquad V_2(z) = 0, \quad z = H_2,$$

$$V_1(z) = \beta_3 V_2(z), \qquad \beta_4 V_1'(z) + \beta_5 V_1(z) = \beta_6 V_2'(z) + \beta_7 V_2(z), \qquad z = 0,$$

$$\beta_1 = \left(k_1 s_2 + k_2 s_3\right) r_1(-H_0), \qquad \beta_3 = \frac{r_1(0)}{r_2(0)}, \qquad \beta_4 = -\tilde{\rho}_1(0) r_1(0)\alpha_1(0),$$

$$\beta_2 = |\mathbf{k}|^2\left(s_1 - \omega\right) + \left(k_1 s_2 - k_2 s_2\right)\left(k_2 u_1'(-H_0) - k_1 v_1'(-H_0)\right) - \left(k_1 s_2 + k_2 s_3\right) r_1(-H_0)\alpha_1(-H_0),$$

$$\beta_5 = \tilde{\rho}_1(0)\left(r_1'(0) - r_1(0)\right) + \frac{g|\mathbf{k}|^2}{r_1(0)}\left(\tilde{\rho}_1(0) - \tilde{\rho}_2(0)\right),$$

$$\beta_6 = -\tilde{\rho}_2(0) r_2(0)\alpha_2(0), \qquad \beta_7 = -\tilde{\rho}_2(0)\left(r_2'(0) - r_2(0)\right).$$

При $q_j(z) = \text{const}$ имеем $V_j(z) = C_1^j \cos\sqrt{q_j}\,z + C_2^j \sin\sqrt{q_j}\,z$. Удовлетворив граничные условия, получим систему уравнений для определения C_1^j, C_2^j:

$$\sum_{k=1}^{4} a_{nk}x_k = 0, \qquad n=\overline{1,4}, \qquad (x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2\right)^T, \tag{3.4}$$

$$a_{11} = \sqrt{q_1}\beta_1 \sin\sqrt{q_1}H_0 - \beta_2\cos\sqrt{q_1}H_0, \qquad a_{12} = \sqrt{q_1}\beta_1\cos\sqrt{q_1}H_0 + \beta_2\sin\sqrt{q_1}H_0,$$

$$a_{21}=0, \quad a_{23} = -\beta_3, \quad a_{31}=\beta_5, \quad a_{32} = \sqrt{q_1}\beta_{4,} \quad a_{33} = -\beta_7, \quad a_{34} = -\sqrt{q_2}\beta_{6,}$$

$$a_{13}=a_{14}=a_{22}=a_{24}=a_{41}=a_{42}=0,$$

условие совместности которой равносильно дисперсионному соотношению для $\omega = \omega(k_1,k_2,\kappa_{11},\kappa_{12},\kappa_{21},\kappa_{22},b_1,b_2)$

$$\sqrt{q_2}\beta_6 = \left[\beta_7 - \beta_3\left(\beta_5 + \sqrt{q_1}\beta_4\frac{\beta_2 - \sqrt{q_1}\beta_1\,\mathrm{tg}\sqrt{q_1}H_0}{\sqrt{q_1}\beta_1 + \beta_2\,\mathrm{tg}\sqrt{q_1}H_0}\right)\right]\mathrm{tg}\sqrt{q_2}H_2.$$

Функции $V_j(z)$ примут вид

$$V_1(z) = \tilde{C}\left(C_1^1\cos\sqrt{q_1}z + C_2^1\sin\sqrt{q_1}z\right), \quad V_2(z) = \tilde{C}\left(C_1^2\cos\sqrt{q_2}z + \sin\sqrt{q_2}z\right),$$

$$C_1^1 = -\frac{\sqrt{q_2}\beta_3\beta_6\left(\sqrt{q_1}\beta_1\cos\sqrt{q_1}H_0 + \beta_2\sin\sqrt{q_1}H_0\right)}{\Delta},$$

$$C_2^1 = -\frac{\sqrt{q_2}\beta_3\beta_6\left(\sqrt{q_1}\beta_1\sin\sqrt{q_1}H_0 - \beta_2\cos\sqrt{q_1}H_0\right)}{\Delta}, \qquad C_1^2 = \frac{C_1^1}{\beta_3},$$

$$\Delta = (\beta_7 - \beta_3\beta_5)\left(\sqrt{q_1}\beta_1\cos\sqrt{q_1}H_0 + \beta_2\sin\sqrt{q_1}H_0\right) +$$
$$+\sqrt{q_1}\beta_3\beta_4\left(\sqrt{q_1}\beta_1\sin\sqrt{q_1}H_0 - \beta_2\cos\sqrt{q_1}H_0\right),$$

$\tilde{C}$ — произвольная действительная постоянная. Искомые параметры возмущенного движения примут вид

$$v'_{jz} = V_j(z)\exp\left(i(k_1x + k_2y - \omega t) + \int_{-H_0}^{z}\alpha_j(\xi)\,d\xi\right),$$

$$v'_{jx} = \frac{1}{i|\mathbf{k}|^2}\left[\left(k_2\frac{k_1v'_j - k_2u'_j}{r_j(z)} - k_1\alpha_j\right)V_j(z) - k_1V'_j(z)\right]\exp\left(i(k_1x+k_2y-\omega t) + \int_{-H_0}^{z}\alpha_j(\xi)\,d\xi\right),$$

$$v'_{jy} = \frac{1}{i|\mathbf{k}|^2}\left[\left(k_1\frac{k_2u'_j - k_1v'_j}{r_j(z)} - k_2\alpha_j\right)V_j(z) - k_2V'_j(z)\right]\exp\left(i(k_1x+k_2y-\omega t) + \int_{-H_0}^{z}\alpha_j(\xi)\,d\xi\right),$$

$$p'_j = \frac{\tilde{\rho}_j}{i|\mathbf{k}|^2}\left[\left(r_j(z)\alpha_j\right)V_j(z) + r_j(z)V'_j(z)\right]\exp\left(i(k_1x+k_2y-\omega t) + \int_{-H_0}^{z}\alpha_j(\xi)\,d\xi\right),$$

$$\rho_j' = \frac{\tilde{\rho}_j}{ir_j(z)} V_j(z) \exp\left(i(k_1 x + k_2 y - \omega t) + \int_{-H_0}^{z} \alpha_j(\xi)\, d\xi \right),$$

$$\eta_1' = \frac{\tilde{C} C_1^1}{ir_1(0)} \exp\left(i(k_1 x + k_2 y - \omega t) + \int_{-H_0}^{0} \alpha_1(\xi)\, d\xi \right),$$

$$\eta' = \frac{\tilde{C}}{ir_2(H_2)} \left(C_1^2 \cos\sqrt{q_2} H_2 + \sin\sqrt{q_2} H_2 \right) \exp\left(i(k_1 x + k_2 y - \omega t) + \int_{-H_0}^{H_2} \alpha_2(\xi)\, d\xi \right).$$

В случае экспоненциального распределения плотности $\tilde{\rho}_j = \rho_{j0} e^{-\sigma_j z}$ уравнение для $q_j(z)$ примет вид

$$q_j(z) = -\frac{1}{4}\sigma_j^{\,2} - |\mathbf{k}|^2 - \frac{r_j''(z) - \sigma_j r_j'(z)}{r_j(z)} + g\frac{|\mathbf{k}|^2}{r_j^{\,2}(z)}\sigma_j$$

или

$$r_j''(z) - \sigma_j r_j'(z) = -\left(q_j(z) + \frac{1}{4}\sigma_j^{\,2} + |\mathbf{k}|^2 \right) r_j(z) + g\frac{|\mathbf{k}|^2}{r_j(z)}\sigma_j.$$

Данное обыкновенное дифференциальное уравнение при помощи подстановки $L_j(r) = \dfrac{r_j'(z)}{\sigma_j}$ может быть приведено к уравнению Абеля второго рода [4]:

$$L_j' L_j - L_j = -\frac{1}{\sigma_j^{\,2}}\left(q_j(z) + \frac{1}{4}\sigma_j^{\,2} + |\mathbf{k}|^2 \right) r_j(z) + g\frac{|\mathbf{k}|^2}{r_j(z)}\sigma_j,$$

аналитическое решение которого при $q_j(z) = -\dfrac{1}{4}\sigma_j^{\,2} - |\mathbf{k}|^2$ выражается параметрически:

$$r_j = |\mathbf{k}|^2 \sqrt{\frac{g}{2\sigma_j}} \frac{\exp(\tau^2)}{\int \exp(\tau^2) d\tau - \bar{C}_j}, \qquad L_j = |\mathbf{k}|^2 \sqrt{\frac{g}{2\sigma_j}} \frac{\exp(\tau^2) - 2\tau\left(\int \exp(\tau^2) d\tau - \bar{C}_j \right)}{\int \exp(\tau^2) d\tau - \bar{C}_j}.$$

В случае $q_j = q_j(z)$ можно построить решение с учетом начальных условий [1]

$$V_{j1}(0) = 1, \quad V_{j1}'(0) = 0, \quad V_{j2}(0) = 0, \quad V_{j2}'(0) = 1.$$

Общее решение $V_j(z)$ будет иметь вид $V_j(z) = F_j V_{j1}(z) + E_j V_{j2}(z)$. Удовлетворив граничные условия

$$\sum_{k=1}^{4} b_{nk} y_k = 0, \quad n = \overline{1,4}, \quad \left(y_1, y_2, y_3, y_4 \right) = \left(F_1, E_1, F_2, E_2 \right)^T,$$

$$b_{11} = \beta_1 V'_{11}(-H_0) - \beta_2 V'_{11}(-H_0), \quad b_{12} = \beta_1 V'_{12}(-H_0) - \beta_2 V_{12}(-H_0), \quad b_{21} = 1, \quad b_{23} = -\beta_3,$$

$$b_{31} = \beta_5, \quad b_{32} = \beta_4, \quad b_{33} = -\beta_7, \; b_{34} = -\beta_7, \; b_{43} = V_{21}(H_2), \quad b_{44} = V_{22}(H_2),$$

$$b_{13} = b_{14} = b_{22} = b_{24} = b_{41} = b_{42} = 0,$$

получим уравнение для определения $\omega = \omega\left(k_1, k_2, \kappa_{11}, \kappa_{12}, \kappa_{21}, \kappa_{22}, b_1, b_2\right)$:

$$\beta_7 - \beta_6 \frac{V_{21}(H_2)}{V_{22}(H_2)} = \beta_3 \left[\beta_5 - \beta_4 \frac{\beta_1 V'_{11}(-H_0) - \beta_2 V_{11}(-H_0)}{\beta_1 V'_{12}(-H_0) - \beta_2 V_{12}(-H_0)} \right],$$

согласно которому можно определить все искомые параметры возмущенного движения.

4. Задача о волнах малой амплитуды в канале переменной глубины

Рассмотрим установившийся поток идеальной тяжелой жидкости, заключенный между твердой крышкой и дном, имеющим неровность. Предположим, что жидкость является несжимаемой и неоднородной.

Рассматривая плоскую задачу, выберем декартову систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс совпадала с невозмущенной поверхностью дна. Пусть $\rho(x, y)$ — плотность жидкой частицы, $p(x, y)$ — гидродинамическое давление, g — ускорение силы тяжести, $\mathbf{v}$— вектор скорости. Если ввести в рассмотрение вектор $\mathbf{a} = \sqrt{\rho}\mathbf{v}$, то в безразмерных переменных имеем уравнения движения

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \left(\mathbf{a} \cdot \nabla\right)\mathbf{a} = -\nu \rho \mathbf{j} - \nabla p, \quad \nu = \frac{gH}{\mathbf{c}^2} \qquad (4.1)$$

и граничные условия

$$a_n = 0, \quad y = \alpha(x), \qquad a_y = 0, \quad y = 1,$$

$$\rho(x, y) = \rho_\infty(y), \quad a_x(x, y) = a_{x\infty}(y), \quad a_y(x, y) = 0, \qquad x \to -\infty.$$

В системе уравнений (4.1) H — глубина жидкости, $\mathbf{c}$ — характерная скорость. Новые единицы измерения выбираются так, чтобы расход жидкости и средняя глубина жидкости были равны единице.

Преобразуя уравнения системы (4.1), приходим к уравнению для функции тока $\psi(x, y)$ [6, 7]:

$$\Delta \psi = h'(\psi) - \nu \rho'(\psi) y, \qquad h(\psi) = \frac{\mathbf{a}^2}{2} + p + \nu \rho(\psi) y \qquad (4.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered}\psi = 0, \quad y = \alpha(x), \qquad \psi = 0, \quad y = 1, \\ a_x(x,y) = a_{x\infty}(y), \quad a_y(x,y) = 0, \qquad x \to -\infty.\end{gathered} \tag{4.3}$$

От независимых переменных (x, y) перейдем к новым независимым переменным (x, ψ). В новых переменных уравнение неразрывности из (4.1) и уравнение (4.2) запишутся следующим образом:

$$a_x \frac{\partial a_y}{\partial \psi} - a_y \frac{\partial a_x}{\partial \psi} + \frac{\partial a_x}{\partial x} = 0, \qquad a_x \frac{\partial a_x}{\partial \psi} + a_y \frac{\partial a_y}{\partial \psi} - \frac{\partial a_y}{\partial x} = h' - \nu \rho' y. \tag{4.4}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a_y}{a_x}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{a_x}, \qquad y = \int_0^{\psi} \frac{\mathrm{d}t}{a_x(x,t)}. \tag{4.5}$$

Граничное условие (4.3) примет вид

$$\begin{gathered}a_n = 0, \quad \psi = 0, \qquad a_y = 0, \quad \psi = 1, \\ a_x = q(\psi), \quad a_y = 0, \qquad x \to -\infty.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Подставив граничное условие при $x \to -\infty$ в систему (4.4), получим уравнение для невозмущенного горизонтального потока:

$$\frac{dq^2(\psi)}{d\psi} = 2\left[h'(\psi) - \nu \rho'(\psi) \int_0^{\psi} \frac{dt}{q(t)} \right]. \tag{4.7}$$

При обтекании неровности дна наблюдается возмущение горизонтальной и вертикальной компонент вектора скорости

$$a_x = q(\psi)\big(1 + u(x,\psi)\big), \qquad a_x = q(\psi) v(x,\psi).$$

Сделаем замену зависимых и независимых переменных, полагая $q(\psi) > 0$

$$\eta = \int_0^{\psi} \frac{dt}{q(t)}.$$

Данное преобразование осуществляет тождественное отображение множества $D_{x\psi} = \{(-\infty; +\infty) \times [0;1]\}$ на множество $D_{x\eta}$.

Краевой задаче для системы уравнений (4.4) с граничными условиями (4.6) соответствует краевая задача

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} + u \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \eta}\left[q^2 u\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[q^2\left(u^2 + v^2\right)\right] + q\frac{dq(\eta)}{d\eta} - q^2 \frac{\partial v}{\partial x} = h'(\psi) - \nu \rho'(\psi) \int_0^{\eta} \frac{dt}{1+u}\end{gathered} \tag{4.8}$$

с граничными условиями

$$\left(u+1\right)\cos\theta(x)+v\sin\theta(x)=0,\ \eta=0, \qquad v=0,\ \eta=1, \qquad u=v=0, \quad x\to-\infty,$$

где $\theta(x)$ — угол между осью x и нормалью к поверхности дна. Выражая $q\dfrac{dq}{d\eta}$ из уравнения (4.7)

$$\frac{dq(\eta)}{d\eta}=h'(\eta)-\nu\rho'(\eta)\eta,$$

исключим из уравнения (4.8) функцию $h'(\eta)$. Таким образом, для искомых функций $u(x,\eta)$ и $v(x,\eta)$ получается следующая краевая задача:

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial v}{\partial\eta},\\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left[q^2u\right]-q\frac{dq(\eta)}{d\eta}-\nu\rho'(\psi)\int_0^\eta u\,dt=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[q^2\left(u^2+v^2\right)\right]-\nu\rho'(\eta)\int_0^\eta\frac{u^2}{1+u}dt\end{gathered}\tag{4.9}$$

с граничными условиями

$$-\left(u+1\right)\sin\gamma(x)+v\cos\gamma(x)=0,\ \eta=0, \qquad v=0,\ \eta=1,\tag{4.10}$$

где $\gamma(x)$ — угол между осью абсцисс и касательной к поверхности дна. От функций $u(x,\eta),v(x,\eta)$ будем требовать в дальнейшем ограниченности при $x\to+\infty$.

Если задача (4.9) с граничными условиями (4.10) решена, уравнение семейства линий тока дается равенством (4.5), в котором лишь нужно сделать замену переменных

$$y(x,\eta)=\int_0^\eta\frac{dt}{1+u(x,t)}.$$

Отбрасывая в уравнении (4.9) нелинейные слагаемые, получим

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial\eta}\left[q^2u\right]-q\frac{dq(\eta)}{d\eta}-\nu\rho'(\eta)\int_0^\eta u\,dt=0.\tag{4.11}$$

В граничных условиях предположим, что отклонение донной поверхности от горизонтального положения является малым, что соответствует малости $\max\gamma(x),\ x\in\left[\alpha;\beta\right]$. Вне отрезка $\left[\alpha;\beta\right]$ будем предполагать дно горизонтальным.

Используя для функции $\operatorname{tg}\gamma(x)$ соответствующую аппроксимацию, граничные условия (4.10) представим в виде

$$v(x,0)=\gamma(x), \qquad v(x,1)=0,\tag{4.12}$$

функцию $\gamma(x)$, характеризующую изменение дна, будем предполагать дважды непрерывно-дифференцируемой.

Исключая функцию $u(x,\eta)$ из системы (4.11), преобразуем исходную задачу к линейной краевой задаче для функции $v(x,\eta)$:

$$\frac{d}{d\eta}\left[q^2(\eta)\right]\frac{\partial v}{\partial \eta}+q^2(\eta)\,\Delta v-\nu\rho'(\eta)v=0 \tag{4.13}$$

с граничными условиями (4.12).

В уравнении (4.13) произведем замену

$$v(x,\eta)=\frac{1}{q(\eta)}\tilde{v}(x,\eta). \tag{4.14}$$

Для функции $\tilde{v}(x,\eta)$ получим краевую задачу

$$\begin{gathered} q(\eta)\,\Delta\tilde{v}-\left[q''(\eta)+\nu\rho'(\eta)\right]\tilde{v}=0,\\ \tilde{v}(x,0)=q(0)\,\gamma(x),\quad \tilde{v}(x,1)=0. \end{gathered} \tag{4.15}$$

Краевая задача (4.15) — однородное уравнение Гельмгольца с неоднородными граничными условиями. Коэффициент при $\tilde{v}(x,\eta)$ в уравнении Гельмгольца зависит от скорости набегающего потока и скорости изменения плотности вдоль линий тока. Перенесем неоднородность из краевых условий в исходное уравнение при помощи введения вспомогательной функции $S(x,\eta)$:

$$\tilde{v}(x,\eta)=S(x,\eta)+q(0)\,\gamma(x)\,(1-\eta). \tag{4.16}$$

Для функции $S(x,\eta)$ получим граничную задачу

$$\begin{gathered} \Delta S(x,\eta)-f(\eta)\,S(x,\eta)=q(0)\left[\gamma''(x)-f(\eta)\,\gamma(x)\right](\eta-1),\\ S(x,0)=S(x,1)=0,\quad q(\eta)\,f(\eta)=q''(\eta)+\nu\rho'(\eta). \end{gathered} \tag{4.17}$$

Предположим $f(\eta)=C\equiv\text{const}$. В этом случае плотность $\rho(\eta)$ связана со скоростью набегающего потока соотношением

$$\nu\rho(\eta)=C_1\int_0^\eta q(t)\,dt-q'(\eta)+C_2,\qquad C_2=\text{const}, \tag{4.18}$$

а системе (4.17) соответствует неоднородное уравнение Гельмгольца с постоянным коэффициентом для функции $S(x,\eta)$ с однородными краевыми условиями

$$\begin{gathered} \Delta S(x,\eta)-C\,S(x,\eta)=q(0)\left[\gamma''(x)-C\,\gamma(x)\right](\eta-1),\\ S(x,0)=S(x,1)=0. \end{gathered}$$

Решение данной задачи будем искать в виде [6]

$$S(x,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n(x)\sin\delta_n\eta,\qquad \delta_n=\pi n,$$
$$q(0)\left[\gamma''(x)-C\,\gamma(x)\right](\eta-1)=\Phi(x,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(x)\sin\delta_n\eta. \tag{4.19}$$

Для функции $S_n(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$S_n''(x)-\left(\delta_n^{\,2}+C\right)S_n(x)=-\frac{2}{\delta_n}q(0)\left[\gamma''(x)-C\gamma(x)\right]$$

с граничными условиями

$$S_n(x)=0,\quad x\to-\infty,\qquad\qquad \left|S_n(x)\right|<+\infty,\quad x\to+\infty,$$

общее решение которого имеет вид

$$S_n(x)=\frac{2q(0)\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}}{\delta_n\left(\delta_n^{\,2}+C\right)}\int_{-\infty}^{x}\left[\gamma''(\xi)-C\gamma(\xi)\right]\operatorname{sh}\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}\left(\xi-x\right)d\xi.$$

Подставив выражение для $S_n(x)$ в (4.14), (4.16) и (4.19), получим выражение для вертикальной скорости:

$$v(x,\eta)=\frac{1}{q(\eta)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q(0)\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}}{\delta_n\left(\delta_n^{\,2}+C\right)}\int_{-\infty}^{x}\left[\gamma''(\xi)-C\gamma(\xi)\right]\operatorname{sh}\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}\left(\xi-x\right)d\xi\cdot\sin\delta_n\eta+$$
$$+\frac{q(0)}{q(\eta)}\gamma(x)(1-\eta).$$

Так как горизонтальная и вертикальная скорости связаны между собой соотношением (4.11), выражение для $v(x,\eta)$ будет иметь вид

$$u(x,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q(0)\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}}{\delta_n\left(\delta_n^{\,2}+C\right)}\frac{\delta_n\,q(\eta)\cos\delta_n\eta-q'(\eta)\sin\delta_n\eta}{q^2(\eta)}\cdot$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{\xi}\left[\gamma''(\varsigma)-C\gamma(\varsigma)\right]\operatorname{sh}\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}\left(\xi-\varsigma\right)d\varsigma+q(0)\frac{q(\eta)+(1-\eta)q'(\eta)}{q^2(\eta)}\int_{-\infty}^{x}\gamma(\xi)\,d\xi.$$

Если предположить, что функция $f(\eta)$ из системы (4.17) тождественно равна нулю, что соответствует случаю, когда соотношение между плотностью $\rho(\eta)$ и скоростью набегающего потока имеет вид

$$v\rho(\eta)+q'(\eta)=C_2\equiv\text{const}, \tag{4.20}$$

выражения для вертикальной и горизонтальной скорости примут вид

$$v(x,\eta)=\frac{1}{q(\eta)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q(0)\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}}{\delta_n}\int_{-\infty}^{x}\gamma''(\xi)\,\operatorname{sh}\delta_n\left(\xi-x\right)d\xi\cdot\sin\delta_n\eta+\frac{q(0)}{q(\eta)}\gamma(x)(1-\eta),$$

$$u(x,\eta)=\frac{1}{q^2(\eta)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q(0)}{\delta_n^{\,2}}\left[\delta_n\,q(\eta)\cos\delta_n\eta-q'(\eta)\sin\delta_n\eta\right]\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{\xi}\gamma''(\varsigma)\,\operatorname{sh}\delta_n\left(\xi-\varsigma\right)d\varsigma+q(0)\frac{q(\eta)+(1-\eta)q'(\eta)}{q^2(\eta)}\int_{-\infty}^{x}\gamma(\xi)\,d\xi.$$

Если предположить, что твердая крышка имеет неровность, расположенную, вообще говоря, несимметрично по отношению к неровности дна, или что граничные условия (4.12) имеют вид

$$v(x,0)=\gamma(x),\qquad v(x,1)=r(x),\tag{4.21}$$

где $r(x)$ — дважды непрерывно-дифференцируемая функция — угол между осью абсцисс и касательной к твердой крышке, в этом случае вспомогательная функция (4.16) $S(x,\eta)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\tilde{v}(x,\eta)=S(x,\eta)+q(0)\,\gamma(x)\,(1-\eta)+q(0)\,r(x)\,\eta.$$

Краевая задача для $S(x,\eta)$ примет вид

$$\Delta S(x,\eta)-f(\eta)\,S(x,\eta)=$$
$$=q(0)\left\{\left[\gamma''(x)-f(\eta)\gamma(x)\right](\eta-1)-\left[r''(x)-f(\eta)\,r(x)\right]\eta\right\},$$
$$S(x,0)=S(x,1)=0,\quad q(\eta)\,f(\eta)=q''(\eta)+\nu\rho'(\eta).$$

Отыскивая решение $S(x,\eta)$ в виде (4.19), при соотношении между плотностью и скоростью набегающего потока (4.18), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $S_n(x)$

$$S_n''(x)-\left(\delta_n^{\,2}+C\right)S_n(x)=\frac{2}{\delta_n}q(0)\left\{(-1)^n\left[r''(x)-Cr(x)\right]-\left[\gamma''(x)-C\gamma(x)\right]\right\}$$

с граничными условиями (4.21).

Общее решение данной задачи имеет вид

$$S_n(x)=\frac{2q(0)\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}}{\delta_n\left(\delta_n^{\,2}+C\right)}\int_{-\infty}^{x}\left\{\left[\gamma''(\xi)-C\gamma(\xi)\right]+(-1)^{n+1}\left[r''(\xi)-Cr(\xi)\right]\right\}\operatorname{sh}\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}\left(\xi-x\right)d\xi.$$

Выражения для вертикальной и горизонтальной скорости соответственно примут вид

$$v(x,\eta)=\frac{1}{q(\eta)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q(0)\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}}{\delta_n\left(\delta_n^{\,2}+C\right)}\int_{-\infty}^{x}\left\{\left[\gamma''(\xi)-C\gamma(\xi)\right]+(-1)^{n+1}\left[r''(\xi)-Cr(\xi)\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\,\mathrm{sh}\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}\left(\xi-x\right)d\xi\cdot\sin\delta_n\eta+\frac{q(0)}{q(\eta)}\gamma(x)(1-\eta)+\frac{q(0)}{q(\eta)}r(x)\eta,$$

$$u(x,\eta)=\frac{1}{q^2(\eta)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q(0)\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}}{\delta_n^{\,2}\left(\delta_n^{\,2}+C\right)}\left[\delta_n\,q(\eta)\cos\delta_n\eta-q'(\eta)\sin\delta_n\eta\right]\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{\xi}\left\{\left[\gamma''(\xi)-C\gamma(\xi)\right]+(-1)^{n+1}\left[r''(\xi)-Cr(\xi)\right]\right\}\,\mathrm{sh}\sqrt{\delta_n^{\,2}+C}\left(\xi-\varsigma\right)d\varsigma+$$

$$+\frac{q(0)}{q^2(\eta)}\left\{q'(\eta)\int_{-\infty}^{x}\gamma(\xi)\,d\xi+\left[q(\eta)-q'(\eta)\eta\right]\int_{-\infty}^{x}\left[\gamma(\xi)-r(\xi)\,\right]d\xi\right\}.$$

В предположении (4.20) выражения для составляющих вектора скорости примут вид

$$v(x,\eta)=\frac{1}{q(\eta)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q(0)}{\delta_n^{\,2}}\int_{-\infty}^{x}\left[\gamma''(\xi)+(-1)^{n+1}r''(\xi)\right]\mathrm{sh}\;\delta_n\left(\xi-x\right)d\xi\cdot\sin\delta_n\eta+$$

$$+\frac{q(0)}{q(\eta)}\gamma(x)(1-\eta)+\frac{q(0)}{q(\eta)}r(x)\eta,$$

$$u(x,\eta)=\frac{1}{q^2(\eta)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q(0)}{\delta_n^{\,2}}\left[\delta_n\,q(\eta)\cos\delta_n\eta-q'(\eta)\sin\delta_n\eta\right]\cdot \tag{4.22}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{\xi}\left[\gamma''(\varsigma)+(-1)^{n+1}r''(\varsigma)\right]\,\mathrm{sh}\;\delta_n\left(\xi-\varsigma\right)d\varsigma+$$

$$+\frac{q(0)}{q^2(\eta)}\left\{q'(\eta)\int_{-\infty}^{x}\gamma(\xi)\,d\xi+\left[q(\eta)-q'(\eta)\eta\right]\int_{-\infty}^{x}\left[\gamma(\xi)-r(\xi)\,\right]d\xi\right\}.$$

Таким образом, из выражений (4.22) видно, что отклонение линий тока в возмущенном потоке от соответствующих линий тока в плоскопараллельном потоке характеризуется величиной $S_n(x)$, целиком зависящей от неровности твердой границы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Алешков Ю. З.* Волны на поверхности сыпучих сред, вызванные потоком жидкости // Вестник С.-Петерб. ун-та. 2002. Сер. 1. Вып.4 (№ 25). С. 35–43.
2. *Великанов М. А.* Движение наносов. М., 1948.
3. *Великанов М. А.* Динамика русловых потоков. М., 1954.
4. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. М., 1995.
5. *Перегудин С. И.* Пространственные волновые движения на поверхности сыпучих сред // Труды Средневолжского математического общества. 2003. Т. 5. № 1. С. 130–138.

6. *Перегудин С. И.* Течение стратифицированной жидкости в канале переменной глубины (депонированная рукопись) // Труды семинара по дифференциальным уравнениям Мордовского гос. университета. Саранск, январь—июнь 1993 г., № 2076-В93.

7. *Тер-Крикоров А. М.* О внутренних волнах в неоднородной жидкости. ПММ, 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 1067–1076.

8. *Франкль Ф. И.* О движении песчаных волн // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89. № 1. С. 29–32.

S. Peregudin

THE PROBLEM ON LOW AMPLITUDE WAVES IN THE CHANGEABLE DEPTH CHANNEL

The article is devoted to two problems of hydrodynamics and the wave theory: non potential movement of an ideal incompressible non-uniform liquid above a firm and deformable bottom. A mathematical model is analytically given in a linear approximation. The final solutions allow defining a wave mode for the researched water area.