УДК 517.9

В. Ф. Зайцев, Л. В. Линчук

О ТЕХНОЛОГИЯХ ПОИСКА СИММЕТРИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается разрешимость обратной задачи группового анализа для некоторых видов нелокальных операторов и обсуждается проблема выбора класса операторов. Найдены широкие классы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядка, для которых может быть получена в явном виде фактор-система, сводящаяся к одному или двум уравнениям Риккати. Таким образом, решения исходных уравнений представимы через фундаментальные системы решений линейных уравнений 2-го порядка.

Общеизвестно, что доказательство существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и поиск этих решений в аналитической замкнутой форме — принципиально различные задачи. И если теоремы существования решений ОДУ (при разумных ограничениях на свойства решения и функций, входящих в уравнение) доказаны достаточно давно, то исследования интегрируемости ОДУ в замкнутом виде продолжаются до сих пор, не теряя актуальности, несмотря на успехи качественной и численной теорий ОДУ. Интересно, что появление первого регулярного алгоритма поиска решений в замкнутой форме (Софус Ли) в конце XIX века совпало с появлением устоявшегося мнения о том, что все интегрируемые в замкнутом виде уравнения уже известны и надо искать другие методы представления решений. Однако оказалось, что групповой анализ позволяет найти большое число уравнений, интегрируемость которых не очевидна, а актуальность весьма велика (в многочисленных приложениях и в математическом моделировании). Оказалось возможным решить и ряд обратных задач — найти классы уравнений, обладающих априорной симметрией. В конце XX века ситуация повторилась — развитие теории нелокальных операторов происходило на фоне признания группового анализа ОДУ завершенным научным направлением, пригодным разве что в качестве «учебного полигона».

Поэтому в последнее десятилетие XX века усилия большинства ученых, занимающихся групповым анализом, были направлены на исследование симметрий уравнений математической физики (УМФ) и поиск инвариантных решений. Однако редукция УМФ с помощью допускаемой группы опять-таки приводит к ОДУ; им удовлетворяют и неизвестные функции, входящие в инвариантные решения. В это же время в литературе эпизодически встречаются попытки использования высших симметрий для анализа и интегрирования ОДУ. Касательные симметрии рассматриваются в фундаментальных монографиях [3, 6], нелокальные экспоненциальные операторы (ЭНО) возникают при изучении специальных вопросов в работах [5, 7].

Существовавшие к тому времени методы поиска высших симметрий были недостаточно эффективны: например, при поиске касательных симметрий для ОДУ второго порядка в общем случае мы получаем исходное (исследуемое) уравнение в качестве одного из характеристических уравнений при решении определяющей системы. Напомним: абсолютно аналогичная ситуация возникает при поиске точечных симметрий для ОДУ 1-го порядка. Конечно, можно было бы воспользоваться дискретно-групповым анализом [1], который, как показано в работе [4], позволяет для некоторых классов уравнений найти автопреобразования Беклунда (соответствующие касательным преобразованиям на многообразии решений). Однако дискретно-групповой анализ проведен лишь для очень немногих классов ОДУ, и процедура поиска дискретных симметрий значительно более трудоемка, чем поиск инфинитезимальных операторов.

Поэтому понятен интерес к различным формам нелокальных операторов, процедурам поиска которых посвящено в последние годы немало исследований (см., например, литературу [2, 8]; в последней работе рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения). Вместе с тем следует учитывать, что процедура «конструирования» уравнения из инвариантов — универсального $I_0 = x$ и первого дифференциального $I_1 = z(x, y, y')$ приводит в общем случае к ЭНО: если рассматривать определение первого дифференциального инварианта как уравнение «в полных производных» относительно координаты канонического оператора $\Phi\partial_y$, мы получим

$$\Phi = \exp\left(-\int \frac{z_y}{z_{y'}}\,dx\right),$$

где интеграл — полный (то есть D_x^{-1}), и его можно представить в виде формального ряда по производным функции $y(x)$ вплоть до бесконечного порядка. Если первый дифференциальный инвариант не существует (решение соответствующего уравнения есть всегда, но оно может зависеть от производных порядка выше первого), мы приходим к более сложным (не экспоненциальным) формам нелокальных операторов.

Однако, несмотря на многообразие форм операторов и нелокальностей в них, необходимо помнить, что на многообразии решений ОДУ n-го порядка координаты допускаемого инфинитезимального оператора будут зависеть лишь от производных **конечного порядка**, а именно — порядок производных не будет превосходить $n-1$. Это кардинально отличает ОДУ от УМФ, оператор Ли—Беклунда для которых содержит хотя бы по одной переменной производные всех порядков вплоть до бесконечного. Может показаться, что указанное обстоятельство сильно облегчает поиск симметрий для ОДУ, но это лишь кажущееся облегчение — результатом является **отсутствие «независимых» переменных** и, как следствие, — невозможность расщепления условия инвариантности до определяющей системы.

Этот факт наряду с, казалось бы, исчерпывающей информацией о переменных, от которых зависит Ф, приводит к выводу о том, что на первый план выступает технологическая проблема выбора вида оператора, для которого задача поиска симметрии для данного класса ОДУ будет разрешимой. Поэтому наиболее актуальной становится **обратная задача** — поиск классов ОДУ, допускающих оператор заданного вида.

1. Уравнения второго порядка. Рассмотрим некоторые обратные задачи для ОДУ 2-го порядка

$$y'' = F(x, y, y') \tag{1}$$

и оператора

$$X = \zeta(x, y, y')\left(\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y\right). \tag{2}$$

Форма оператора (2) вполне естественна — мы рассматриваем достаточно общий вид касательного (на многообразии) оператора, но не настолько общий, чтобы получить в качестве одного из характеристических уравнений исходное. Немаловажно, что универсальный инвариант этого оператора не зависит от вида функции ζ — аналогично нелокальным экспоненциальным операторам или операторам, соответствующим «неклассическим» симметриям. Очевидно, функция ξ может быть включена в функцию ζ (если $\xi \neq 0$), поэтому для упрощения рассуждений достаточно рассмотреть два случая.

1. $\xi \neq 0$:

$$X = \zeta(x, y, y')\left(\partial_x + \eta(x, y)\partial_y\right). \tag{3}$$

Условие инвариантности при записи по производным F имеет вид:

$$\begin{gathered}\left[(y'-\eta)\zeta_{y'}+\zeta\right]F_x+\left[y'(y'-\eta)\zeta_{y'}+\eta\zeta\right]F_y-\left[(y'-\eta)(\zeta_x+y'\zeta_y)-\right.\\ \left.-(\eta_x+\eta_y y')\zeta\right]F_{y'}+\left[(y'-\eta)\zeta_{y'y'}+2\zeta_{y'}\right]F^2+\left[2(y'-\eta)(\zeta_{xy'}+y'\zeta_{yy'})+2\zeta_x+\right.\\ \left.+(3y'-\eta)\zeta_y+2(\eta_x+\eta_y y')\zeta_{y'}-\eta_y\zeta\right]F+(y'-\eta)\left[\zeta_{xx}+2y'\zeta_{xy}+(y')^2\zeta_{yy}\right]-\\ -2(\eta_x+y'\eta_y)(\zeta_x+y'\zeta_y)-\left[(y')^2\eta_{yy}+2y'\eta_{xy}+\eta_{xx}\right]\zeta=0,\end{gathered} \tag{4}$$

по производным ζ:

$$(y'-\eta)\left[\zeta_{xx}+2y'\zeta_{xy}+(y')^2\zeta_{yy}+2F\zeta_{xy'}+2y'F\zeta_{yy'}+F^2\zeta_{y'y'}\right]-$$

$$-\left[(y'-\eta)F_{y'}-2F+2y'\eta_y+2\eta_x\right]\zeta_x-\left[y'(y'-\eta)F_{y'}-(3y'-\eta)F+2\eta_y(y')^2+\right.$$

$$\left.+2\eta_x y'\right]\zeta_y+\left[(y'-\eta)F_x+y'(y'-\eta)F_y+2F^2-2(\eta_y y'+\eta_x F)\right]\zeta_{y'}+$$

$$+\left[F_x+\eta F_y+(\eta_y y'+\eta_x)F_{y'}-\eta_y F-\eta_{yy}(y')^2-2\eta_{xy}y'-\eta_{xx}\right]\zeta=0. \qquad (5)$$

Уравнение на инвариант $J=J(x,y,y')$:

$$\zeta J_x+\eta\zeta J_y+\left[(\eta-y')(\zeta_x+y'\zeta_y+F\zeta_{y'})+(y'\eta_y+\eta_x)\zeta\right]J_{y'}=0. \qquad (6)$$

Определяющее уравнение можно факторизовать. Фактор-система имеет вид

$$\begin{cases}\psi=\dfrac{\zeta_x+y'\zeta_y+F\zeta_{y'}}{\zeta},\\ F_x+\eta F_y+\left[(\eta-y')\psi+\eta_y y'+\eta_x\right]F_{y'}+\left[(y'-\eta)\psi_{y'}+2\psi-\eta_y\right]F+\\ \quad+(y'-\eta)(\psi_x+y'\psi_y+\psi^2)-2(\eta_y y'+\eta_x)\psi-\eta_{yy}(y')^2-2\eta_{xy}y'-\eta_{xx}=0,\end{cases}$$

либо последнее уравнение можно записать по производным ψ:

$$(y'-\eta)(\psi_x+y'\psi_y+F\psi_{y'}+\psi^2)+\left[(\eta-y')F_{y'}+2F-2\eta_y y'-2\eta_x\right]\psi+$$
$$+F_x+\eta F_y+(\eta_y y'+\eta_x)F_{y'}-\eta_y F-\eta_{yy}(y')^2-2\eta_{xy}y'-\eta_{xx}=0.$$

Второе уравнение системы является определяющим уравнением, построенным для того же уравнения (1) и нелокального оператора

$$X=(\partial_x+\eta(x,y)\partial_y)\exp\left(\int\psi(x,y,y')dx\right).$$

2. $\xi=0$:

$$X=\zeta(x,y,y')\partial_y. \qquad (7)$$

Определяющая система при записи по производным *f* имеет вид:

$$\zeta_{y'}F_x+(y'\zeta_{y'}-\zeta)F_y-(\zeta_x+y'\zeta_y)F_{y'}+\zeta_{y'y'}F^2+$$

$$+(2\zeta_{xy'}+2y'\zeta_{yy'}+\zeta_y)F+2y'\zeta_{xy}+(y')^2\zeta_{yy}+\zeta_{xx}=0, \qquad (8)$$

по производным ζ:

$$\zeta_{xx} + (y')^2\zeta_{yy} + F^2\zeta_{y'y'} + 2y'\zeta_{xy} + 2F\zeta_{xy'} + 2y'F\zeta_{yy'} -$$
$$-F_{y'}\zeta_x - (y'F_{y'} - F)\zeta_y + (y'F_y + F_x)\zeta_{y'} - F_y\zeta = 0. \qquad (9)$$

Уравнение на инвариант $J = J(x, y, y')$:

$$\zeta J_y + (\zeta_x + y'\zeta_y + F\zeta_{y'})J_{y'} = 0. \qquad (10)$$

И здесь определяющая система может быть факторизована:

$$\begin{cases} \psi = \dfrac{\zeta_x + y'\zeta_y + F\zeta_{y'}}{\zeta}, \\ F_y + \psi F_{y'} - \psi_{y'}F - \psi_x - y'\psi_y - \psi^2 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы является определяющим уравнением, построенным для того же уравнения (1) и «ультраканонического» нелокального оператора

$$X = \exp\left(\int \psi(x, y, y')dx\right)\partial_y.$$

Рассмотрим теперь некоторые случаи интегрируемости определяющих уравнений. Относительно F уравнения (4) и (8) сводятся к уравнению Риккати. Очевидно, что они интегрируются в квадратурах, по крайней мере, в двух общих случаях:

1) если коэффициент при F^2 равен нулю (при этом уравнение линейно), то есть

$$\zeta(x, y, y') = G(x, y) + \frac{H(x, y)}{y' - \eta(x, y)}$$

для уравнения (4),

$$\zeta(x, y, y') = G(x, y)y' + H(x, y)$$

для уравнения (8) (последнее соотношение задает точечный оператор в канонической форме);

2) если равен нулю свободный член уравнения (при этом мы получаем уравнение Бернулли), то есть

$$\zeta(x, y, y') = \frac{G(xy' - y, y')x + H(xy' - y, y')}{y' - \eta(x, y)}$$

для уравнения (4),

$$\zeta(x, y, y') = G(xy' - y, y') + xH(xy' - y, y')$$

для уравнения (8).

Здесь *G, H* — произвольные функции своих аргументов.

Уравнения на инварианты (6) и (10) содержат правую часть уравнения (1), поэтому структура первого дифференциального инварианта будет определяться уравнением (1). Этот факт не позволяет записать единую факторизацию для уравнений класса (1), допускающих заданный оператор (2).

Пусть класс уравнений (1) допускает оператор (7). Очевидно, что тогда он допускает оператор $\overline{X} = \zeta_{y'} D_x - X$. Оператор $\overline{X}$ является оператором группы контактных преобразований с характеристической функцией $W = \zeta$. Инварианты $J = J(x, y, y')$ первого порядка оператора $\overline{X}$ удовлетворяют уравнению

$$\zeta_{y'} J_x + (y'\zeta_{y'} - \zeta) J_y - (\zeta_x + y'\zeta_y) J_{y'} = 0, \tag{11}$$

а значит, вид конкретного уравнения класса, допускающего оператор (7), не влияет на структуру инварианта *J*.

Аналогично рассмотрим класс уравнений (1), допускающий оператор (3). В этом случае класс допускает оператор $\overline{X} = (\eta - y')\zeta_{y'} D_x - X$, инварианты первого порядка которого удовлетворяют уравнению

$$\begin{gathered}\left[(\eta - y')\zeta_{y'} - \zeta\right] J_x + \left[(\eta - y') y'\zeta_{y'} - \eta\zeta\right] J_y - \\ - \left[(\eta - y')(\zeta_x + y'\zeta_y) + (y'\eta_y + \eta_x)\zeta\right] J_{y'} = 0\end{gathered} \tag{12}$$

и не определяются структурой конкретного представителя класса (1). Заметим, что оператор $\overline{X}$ является оператором группы контактных преобразований с характеристической функцией $W = (y' - \eta)\zeta$.

Таким образом, во-первых, оператор $\overline{X}$ позволяет записать в общем виде факторизацию для всего класса уравнений (1), допускающих заданный оператор *X*, а во-вторых, для одного и того же уравнения с помощью одного оператора *X* мы можем выписать две различные фактор-системы.

Пример 1. Рассмотрим оператор $X = (y')^2 \partial_y$. Тогда определяющее уравнение имеет вид

$$2y'F_x + (y')^2 F_y + 2F^2 = 0, \tag{13}$$

общее решение которого $F = y'(x + y'G(y', 2y - xy'))^{-1}$. Воспользуемся оператором

$$\overline{X} = 2y'D_x - X = 2y'\partial_x + (y')^2 \partial_y + 0 \cdot \partial_{y'} - 2(y'')^2 \partial_{y''} + \ldots$$

для факторизации класса уравнений

$$y'' = \frac{y'}{x + y'G(y', 2y - xy')}.$$

Инварианты оператора $\overline{X}$ (уравнение на инварианты совпадает с однородным уравнением, которое соответствует определяющему уравнению (13)) порождают фактор-систему

$$\begin{cases} t = y', \\ u = 2y - xy', \\ \dot{u} = tG(t,u). \end{cases} \tag{14}$$

Рассмотрим частный случай $G = tu^3$, то есть уравнение

$$y'' = \frac{y'}{x + (2y - xy')^3 (y')^2}. \tag{15}$$

Интегрируя последнее уравнение системы (14), понижаем порядок исходного уравнения

$$(2y - xy')^2 = -\frac{3}{2((y')^3 + C)}.$$

Это уравнение с помощью преобразования Лежандра $x = p',\ y = qp' - p,\quad y' = q$ приводится к линейному уравнению

$$p' = \frac{2}{q} p \pm \frac{\sqrt{6}}{q\sqrt{-q^3 - C}}. \tag{16}$$

Факторизуем уравнение (15) с помощью исходного оператора $X = (y')^2 \partial_y$. Решая уравнение (10) для инварианта первого порядка

$$J_y + \frac{2}{x + (2y - xy')^3 (y')^2} J_{y'} = 0$$

и полагая в качестве новой зависимой переменной z инвариант первого порядка, получаем фактор-систему

$$\begin{cases} z = 2(y')^3 + \dfrac{3}{(2y - xy')^2}, \\ z' = 0. \end{cases}$$

Таким образом, z является первым интегралом уравнения (15), а построенная факторизация редуцирует уравнение (15) также к виду (16).

Поиск точечных симметрий для уравнения (15) приводит к единственному оператору растяжения $X = 5x\partial_x + 3y\partial_y$, который позволяет понизить порядок уравнения только на единицу, а именно:

$$\begin{cases} t = x^{-3/5} y, \\ u = x^{-2/5} y', \end{cases} \Rightarrow\ (3t - 5u)\dot{u} + 2u + \frac{5u}{1 + (2t - u)^3 u^2} = 0.$$

Пример 2. Уравнение

$$y'' = \frac{2(1-3y')(y')^2}{(2x-9y)y'+3y}$$

допускает оператор $X = \sqrt{y'}(\partial_x + \partial_y)$. Инварианты этого оператора имеют достаточно громоздкую структуру, поэтому для факторизации воспользуемся оператором

$$\overline{X} = \frac{3y'-1}{2\sqrt{y'}}\partial_x - \frac{1}{2}\sqrt{y'}(y'+1)\partial_y + 0\cdot\partial_{y'}$$

и приведем уравнение к виду

$$\begin{cases} t = y', \\ u = \dfrac{x(y')^2 + (x-3y)y' + y}{1-3y'}, \\ \dot{u} = \dfrac{3(t-1)u}{t(3t-1)}. \end{cases}$$

Решая последнее уравнение системы, получаем уравнение

$$x(y')^2 + (x-3y)y' + y = \frac{C(y')^2}{(3y'-1)^2},$$

которое с помощью преобразования Лежандра сводится к линейному уравнению первого порядка, и решение его может быть найдено в параметрической форме. В частности, при $C = 0$ можно выписать решения в явном виде:

$$y = \frac{x(2x^2+3c^2) + 2(x^2+c^2)^{3/2}}{9c^2}.$$

Заметим, что исходное уравнение допускает только один точечный оператор — оператор растяжения $X = x\partial_x + y\partial_y$.

2. Уравнения третьего порядка. Здесь уже возможна ситуация, когда первый дифференциальный инвариант не существует, но существует нетривиальная факторизация. Для этого необходимо и достаточно существование дифференциального инварианта второго порядка.

Мы будем рассматривать обратную задачу группового анализа для класса обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка вида

$$y''' = F(x, y, y'),$$

то есть для уравнений, не содержащих «предстаршую» производную y'', и нелокального оператора

$$X = \int \zeta(x, y, y')dx\left(\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y\right).$$

Решение этой задачи при условии, что оператор не вырождается в точечный и порождает фактор-систему, приводит к следующим четырем случаям.

A) Уравнение

$$y''' = \frac{\beta_{1yy}\left[\alpha_1 y' - (\alpha_1' + c)y - \alpha_2\right]^3}{2\alpha_1^3 \beta_1} - \frac{3c\beta_{1y}\left[\alpha_1 y' - (\alpha_1' + c)y - \alpha_2\right]^2}{\alpha_1^3 \beta_1} +$$
$$+ \frac{\beta_2\left[\alpha_1 y' - (\alpha_1' + c)y - \alpha_2\right]^3}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1^3}\Big[\left(\alpha_1^2\alpha_1''' + 2c\alpha_1\alpha_1'' - c(\alpha_1')^2 + c^3\right)y +$$
$$+ \alpha_1^2\alpha_2' + \alpha_1\alpha_2\alpha_1'' - c\alpha_2\alpha_1' - \alpha_1\alpha_1'\alpha_2' + c\alpha_1\alpha_2' + c^2\alpha_2\Big],$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(x)$, $\alpha_2 = \alpha_2(x)$, $c \in \mathbf{R}$,

$$\beta_1(x,y) = \frac{1}{\alpha_1}E(x)\Psi\left(\frac{y}{\alpha_1}E(x) - \int \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}E(x)dx\right),$$
$$\beta_2(x,y) = \frac{2\alpha_1\alpha_1'' - (\alpha_1')^2}{\alpha_1^2}\frac{1}{\alpha_1^2}\Phi\left(\frac{y}{\alpha_1}E(x) - \int \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}E(x)dx\right),$$

$E(x) = \exp\left(-c\int \frac{dx}{\alpha_1}\right)$, ψ, Φ— произвольные функции своих аргументов, допускает оператор

$$X = \int \frac{\alpha_1^2\beta_1 dx}{\left[\alpha_1 y' - (\alpha_1' + c)y - \alpha_2\right]^2}\left(\alpha_1\partial_x + \left[(\alpha_1' + c)y + \alpha_2\right]\partial_y\right).$$

Заметим, что инварианты построенного оператора могут быть найдены в замкнутом виде, но представляют собой настолько громоздкие выражения, что здесь мы их не приводим.

B) Преобразование эквивалентности $y + \alpha_3(x) \mapsto y$ сводит уравнения этого подкласса к уравнению

$$y''' = \frac{(y')^3}{y} - \frac{3\alpha_1'(y')^2}{2\alpha_1 y} + \frac{\alpha_1'' y'}{\alpha_1} + \alpha_2 y,$$

$\alpha_1 = \alpha_1(x)$, $\alpha_2 = \alpha_2(x)$, которое допускает оператор

$$X = y\int \frac{\alpha_1 dx}{y}\partial_y.$$

Соответствующая факторизация:

$$\begin{cases} v(x) = \dfrac{y''}{y} + \dfrac{\alpha_1(y')^2 - 2\alpha_1' y y'}{2\alpha_1 y^2}, \\ \alpha_1 v' + \alpha_1' v - \alpha_1\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

В полученной фактор-системе первое уравнение также факторизуется с помощью точечного оператора $X = y\partial_y$, поэтому фактор-система может быть записана в виде

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{y'}{y} \\ v(x) = u' + \dfrac{3}{2}u^2 - \dfrac{\alpha_1'}{\alpha_1}u, \\ \alpha_1 v' + \alpha_1' v - \alpha_1\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение этой системы является линейным уравнением первого порядка и легко решается, а второе уравнение представляет собой уравнение Риккати, решение которого можно записать через фундаментальную систему решений линейного уравнения второго порядка с переменными (в общем случае) коэффициентами. Таким образом, исходный класс уравнений линеаризуется в общем виде.

C) Преобразование эквивалентности $y + Ax \mapsto y$ ($A \in \mathbf{R}$) сводит уравнения этого подкласса к уравнению

$$y''' = y'\left\{\left[c(y')^2 + \Phi\right]\Psi - \frac{1}{2c}\Phi''\right\},$$

где $\Phi = \Phi(y)$, $\Psi = \Psi(y)$ — произвольные функции своих аргументов, $c \in \mathbf{R}$, которое допускает оператор

$$X = \int\left(c + \frac{\Phi}{(y')^2}\right)dx\ \partial_x.$$

Этот оператор сводит уравнение к фактор-системе

$$\begin{cases} t = y, \\ v(t) = \dfrac{3cy'' + \Phi'}{2c\left[c(y')^2 + \Phi\right]}, \\ v' + 2cv^2 - \Psi(t) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение фактор-системы также факторизуется с помощью точечного оператора $X = \partial_x$, поэтому итоговая система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} t = y, \\ w(x) = y' \\ v(t) = \dfrac{3cw' + \Phi'}{2c\left(cw^2 + \Phi\right)}, \\ v' + 2cv^2 - \Psi(t) = 0. \end{cases}$$

Здесь оба последних уравнения являются уравнениями Риккати, поэтому для описания решения исходного уравнения требуются две фундаментальные системы решений линейных уравнений второго порядка.

D) Преобразование эквивалентности $y + Ax \mapsto y$ ($A \in \mathbf{R}$) сводит уравнения этого подкласса к уравнению

$$y''' = y'\left(\frac{\Phi'}{\Phi}(y')^2 + \Psi\right),$$

где $\Phi = \Phi(y)$, $\Psi = \Psi(y)$, которое допускает оператор

$$X = \int \frac{\Phi}{(y')^2}\,dx\,\partial_x,$$

а следовательно, может быть факторизовано с помощью его инвариантов:

$$\begin{cases} t = y, \\ v(t) = y'' - \dfrac{\Phi'}{2\Phi}(y')^2, \\ \Phi(t)v' + \Phi'(t)v - \Psi(t)\Phi(t) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение фактор-системы также может быть факторизовано с помощью точечного оператора $X = \partial_x$. Таким образом, фактор-система может быть записана в виде:

$$\begin{cases} t = y, \\ w(x) = y', \\ v(t) = w' - \dfrac{\Phi'}{2\Phi}(w)^2, \\ \Phi(t)v' + \Phi'(t)v - \Psi(t)\Phi(t) = 0. \end{cases}$$

Интегрируемость этой системы принципиально ничем не отличается от случая «B»).

* * *

Проведенные выше рассуждения и построенные примеры показывают, что «технологическая» проблема выбора вида оператора весьма нетривиальна и осложняется многочисленными связями между различными формами (что неудивительно, если принять во внимание тот факт, что все они эквивалентны на многообразии решений). Вместе с тем очевидно, что пока не построен универсальный алгоритм, позволяющий сделать однозначный выбор. Поэтому необходимо провести анализ решений обратных задач для возможно бóльшего числа неэквивалентных типов операторов и классифицировать соответствие между структурой уравнения и наиболее подходящим видом оператора.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Зайцев В. Ф.* О современном групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды II Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их применения». СПб., 1998. С.137–151.
2. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. М., 1993.
3. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М., 1983.
4. *Ибрагимов Н. Х.* Азбука группового анализа // Знание, сер. «Математика и кибернетика». М., 1989. № 8.
5. *Ибрагимов Н. Х.* Опыт группового анализа // Знание, сер. «Математика и кибернетика». М., 1991. № 7.
6. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.
7. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989.
8. *Linchuk L. V.* Symmetry analysis of functional-differential equations // Math. Research. Vol.6. «Theory and practice of differential equations». St. Petersburg: SPbSTU, 2000. P.111–117.

V. Zaitsev, L. Linchuk

ON SEARCHING TECHNOLOGIES OF SYMMETRIES OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

The paper is devoted to the solution of the inverse problem of group analysis for some forms of nonlocal operators. We set the task of choice of operators. We found large classes of the 2nd and the 3rd order nonlinear ordinary differential equations which admitted a factorization. These factor-systems are reduced to one or two Riccati equations. Thus the solutions of the initial equations are represented by the fundamental solutions of the 2nd order linear differential equations.