С. В. Борисёнок

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Обсуждается формализм временных корреляционных функций для исследования корреляционных свойств динамических систем, управляемых методом скоростного градиента. Для практических целей физического моделирования представлены схемы управления для отдельной частицы и для ансамбля частиц. Автокорреляционные свойства управляющего сигнала существенно отличаются от таковых в моделях без управления как в случае отдельной частицы, так и для статистической модели.

1. Управление в физических системах

На границе математических и кибернетических методов теории управления, с одной стороны, и теоретической физики, с другой, в настоящее время разрабатывается плодотворный синтез (в особенности — в теории квантовых систем), который может изменить наше отношение к исследованию математических моделей теоретической физики [1]. Происходит явный сдвиг от описательного подхода к управляющему, в рамках которого осуществляется качественное преобразование изучаемой физической системы. Ее свойства предполагаются контролируемыми, а результат наблюдения, таким образом, — зависящим от выбранной наблюдателем конкретной схемы управления. Пользуясь терминологией [2], можно сказать, что происходит смена парадигмы моделирования и на место описательного (descriptive) подхода приходит предписательный (prescriptive). Управляемые физические системы получают все большее распространение в современных технологиях [3–4].

По особенностям использования математического аппарата в теории управления можно условно выделить два подхода. Одна школа, связанная географически с Западной Европой и США, ориентируется на изучение свойств управляемых систем с помощью интегральных преобразований (в первую очередь, преобразований Лапласа) и, таким образом, использует преимущественно частотные характеристики [5–7]. Другая школа, советская и восточноевропейская, основывается преимущественно на анализе временного поведения дифференциальных уравнений. Выводы советской школы теории управления тесно связаны с теорией катастроф в нелинейных динамических моделях. Классификация различных схем управления для обратных связей и т. п. более детально разработана именно в отечественном подходе (см., например, работу [1]).

Наряду с традиционными схемами управления также вводятся принципиально новые. Изначально теория управления в физических системах предполагала введение единого для всей системы управляющего поля, воздействующего на отдельную частицу [1, 5]. Такая схема хорошо работает в приложениях классической механики и электродинамики, но мало пригодна в задачах с ансамблевым описанием частиц, классических и квантовых. Поэтому традиционная схема должна быть модифицирована для осуществления статистического управления, один из вариантов которого предложен в работах [8–9].

Отметим неоднозначность термина «статистическое управление» в физических системах. В целом мы можем предположить, по меньшей мере, два различных понимания этого термина.

Во-первых, статистической может являться *управляемая* система. В таком подходе управляемая система является ансамблем классических или квантовых частиц, а целевая функция задается зависящей от функции распределения частиц в ансамбле. Такой подход введен в работе [9], там же продемонстрирована его принципиальная эффективность, в частности, в задачах фокусировки квазиклассических частиц.

Во-вторых, статистической может быть *управляющая* система. Такой вариант подробно еще не исследован. В качестве возможного подхода укажем на управление не с помощью единого наложенного на физическую систему внешнего управляющего поля (как до сих пор это делалось в любом физическом приложении теории управления), а на наличие ансамбля управляющих агентов, осуществляющих функции контроля на микроуровне.

Разумеется, вторая схема статистического контроля может быть осуществлена только вкупе с первой, т. е. речь идет уже о двух ансамблях — управляющем и управляемом. В данной статье описываются статистические управляемые системы первого типа. Управляющее поле полагается макроскопическим и единым для всех частиц управляемого ансамбля.

В статье мы обсудим формализм временных корреляционных функций для исследования корреляционных свойств динамических систем, управляемых методом скоростного градиента. Для практических целей физического моделирования — таких, в частности, как управление механическими объектами, нанолитография охлажденных атомов в поле стоячей световой волны[1] и проч., мы представим схемы управления как для отдельной частицы, так и для ансамбля частиц (последнее необходимо для включения в круг обсуждения ряда моделей статистической механики). Мы не будем затрагивать проблемы, связанные с численным моделированием поведения нелинейных динамических систем, и сосредоточимся на некоторых простых, но весьма существенных для понимания особенностей управляемых систем аспектах.

Опишем основные схемы управления подробнее и начнем с нестатистической (механической) схемы управления для отдельной частицы во внешнем поле методом скоростного градиента.

В стандартной модели нелинейная динамическая система представляется в форме [1]:

$$\dot{x} = F(x,u,t)\,, \tag{1.1}$$

со скалярным временем t, вектором состояний $x \in \mathrm{R}^n$ и векторным управляющим сигналом («входом») $u \in \mathrm{R}^m$. Здесь F — непрерывная гладкая векторная функция.

Под целью (целевой функцией) управления понимается гладкая скалярная функция Q с наложенным предельным условием:

$$\lim_{t\to\infty} Q(x(t),t) \to 0\,. \tag{1.2}$$

В выражении (1.2) целевая функция $Q(x(t),t)$ не зависит от сигнала $u(t)$. Для осуществления эффективного механизма контроля ее нужно выразить через управляющий сигнал. Для этого рассмотрим скорость изменения $Q(x(t),t)$ вдоль траекторий (1.1), т. е. производную $\omega(x,u,t) \equiv \dot{Q}$, тогда:

$$\omega(x,u,t) = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + \left[\nabla_x Q(x,t)\right]^T \dot{x}\,,$$

где T — оператор транспонирования. Подставим $\dot{x}$ из равенства (1.1):

$$\omega(x,u,t) = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + \left[\nabla_x Q(x,t)\right]^T F(x,u,t)\,. \tag{1.3}$$

[1] При этом качестве базовых используются модели управляемых нелинейных параметрических колебательных систем с обратной связью, математически близкие к моделям, описывающим поведение холодных атомов в световом поле [3].

В методе скоростного градиента управляющий сигнал выбирается так, чтобы достигнуть направления наиболее быстрого убывания скалярной целевой функции. Вход выражается через некоторую векторную функцию ψ:

$$u = -\psi\left(\nabla_u \omega(x,u,t)\right). \tag{1.4}$$

Этот вектор $\psi(z)$ формирует острый угол с вектором z, т. е. $\psi(z)^T z > 0$, если $z \neq 0$.

Простейшая схема управления предполагает пропорциональную обратную связь (proportional feedback): $\psi(z) \equiv \kappa \cdot z$, $\kappa > 0$; или зависящую только от знака z: $\psi(z) \equiv \kappa \cdot \mathrm{sign}(z)$, $\kappa > 0$.

В случае, когда для динамической управляемой системы можно задать гамильтониан H, цель управления часто задается как достижение некоторого желаемого уровня энергии H_*, тогда

$$Q = \left(H - H_*\right)^2. \tag{1.5}$$

Такая формулировка теории управления особенно удобна для приложения к физическим моделям. В настоящей статье обсуждается случай не зависящей от времени целевой функции: $Q \neq Q(t)$. Для пропорциональной обратной связи получаем тогда

$$u = -\kappa \nabla_u \left(\left[\nabla_x Q(x)\right]^T F(x,u,t)\right). \tag{1.6}$$

Используя тождество $u \equiv \nabla_u \left(u^T u / 2\right)$, уравнение можно записать так:

$$\nabla_u \left(\frac{1}{2} u^T u + \kappa \left[\nabla_x Q(x)\right]^T F(x,u,t)\right) = 0.$$

Если ввести векторную функцию $F_0(x,t) \equiv F(x,u,t)\big|_{u=0}$ для системы без управления, уравнение управления принимает форму

$$\frac{1}{2} u^T u + \kappa \left[\nabla_x Q(x)\right]^T \left(F(x,u,t) - F_0(x,t)\right) = 0. \tag{1.7}$$

Введем оператор градиента:

$$\nabla_x \equiv \sum_{l=1}^{n} e_l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

с ортами e_l в пространстве состояний, тогда уравнение (1.7) записывается в виде

$$\frac{1}{2}u^T u + \kappa \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_l} \cdot \left[F_l(x,u,t) - F_{l,0}(x,t) \right] = 0 . \qquad (1.8)$$

Это уравнение доставляет управляющий сигнал u.

На основе второго закона Ньютона можно переписать динамическое уравнение как ОДУ второго порядка:

$$\ddot{q} = f(q,\dot{q},u,t), \qquad (1.9)$$

где q — пространственная координата и, соответственно, f — нормированная на массу сила, а $\ddot{q}$ — ускорение. Это соответствует случаю двумерного вектора состояний: $x \equiv (x_1, x_2)^T = (q,\dot{q})^T$. Тогда

$$\dot{x} \equiv (\dot{x}_1, \dot{x}_2)^T = (\dot{q}, f(q,\dot{q},u,t))^T,$$

и

$$F(x_1,x_2,u,t) \equiv \begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_1,x_2,u,t) \end{pmatrix}.$$

Если мы введем функцию $f_0(x,t) \equiv f(x,u,t)\big|_{u=0}$ (сила в системе в отсутствие управления), то

$$F(x_1,x_2,u,t) - F_0(x_1,x_2,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_1,x_2,u,t) - f_0(x_1,x_2,t) \end{pmatrix},$$

и, соответственно,

$$\frac{1}{2}u^T u + \kappa \frac{\partial Q(x)}{\partial x_2} \left[f(x_1,x_2,u,t) - f_0(x_1,x_2,t) \right] = 0 . \qquad (1.10)$$

Это уравнение доставляет общую форму управляющего сигнала в методе скоростного градиента для динамического уравнения (1.9).

2. Общие принципы статистического управления ансамблями частиц

Теперь рассмотрим статистический подход на примере классического ансамбля N невзаимодействующих друг с другом частиц [8]. Определим понятие функции плотности ρ с условием: $dP = \rho dx$, где dP — вероятность обнаружить частицу в малом объеме dx пространства состояний R^n-space. Разумеется, на функцию плотности наложена нормировка:

$$\int \rho(x)\,dx = 1 \tag{2.1}$$

(с интегрированием по всей области определения x), т. е. вероятность обнаружить частицу ансамбля в любом из допустимых состояний равна 1. Функция плотности $\rho(x)$ представляет *все* N частиц ансамбля. Частицы совершенно эквивалентны и различаются только наложенными на них начальными условиями. Среднее некоторой величины $A(x)$ определяется в этом случае соотношением

$$\overline{A}(x) \equiv \frac{\int A(x)\,\rho(x)\,dx}{\int \rho(x)\,dx} = \int A(x)\,\rho(x)\,dx \tag{2.2}$$

вследствие соотношения (2.1).

Для дискретной системы N частиц можно ввести

$$\rho(x,t) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \delta_{\{n\}}\left(x(t) - x^{(\alpha)}(t)\right) , \tag{2.3}$$

$\alpha = 1,\ldots, N$ и $x^{(\alpha)} \equiv (x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, ..., x_n^{(\alpha)})^T$, последний является вектором состояний для α-й частицы. Дираковская n-мерная дельта-функция $\delta_{\{n\}}(x)$ определяется через произведение одномерных дельта-функций $\delta(x_\beta)$:

$$\delta_{\{n\}}(x) \equiv \prod_{\beta=1}^{n} \delta(x_\beta)\,. \tag{2.4}$$

На каждую частицу с соответствующим значением $x^{(\alpha)}(t)$ наложено динамическое уравнение (1.1) с определенной функцией F. Через ρ_0 мы обозначаем начальную функцию распределения, а через ρ_* — желаемую. Целевая функция при таком управлении может быть выбрана в виде $Q \equiv \left(\rho - \rho_*\right)^2$.

Заменим в нашей формулировке дискретную функцию (2.3) гладкой дифференцируемой моделью $\rho(x)$. Для одномерных дельта-функций Дирака будем использовать модель

$$\delta_1(z) \equiv \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\{-z^2/\varepsilon^2\}, \text{ где } z \in \mathrm{R}^1,\ \varepsilon > 0 \text{ и } \varepsilon \to 0\,. \tag{2.5}$$

Разумеется, нормировка в такой модели сохраняется:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_2(z)\,dz = 1\,.$$

Тогда

$$\rho(x)=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\prod_{\beta=1}^{n}\delta_{1\,\mathrm{or}\,2}\left(x_\beta - x_\beta^{(\alpha)}\right)\ . \tag{2.6}$$

Выпишем замкнутую систему уравнений для статистического ансамбля. Управляющий сигнал u одинаков для каждой частицы ансамбля, следовательно, он должен быть α-независим. Для этого приложим соотношение (1.8) к α_1-й частице и затем возьмем «среднее» по ансамблю, т. е. $<...>$. В простейшем варианте угловые скобки означают, что мы должны заменить $x^{(\alpha)}$ в конечном выражении средним $\overline{x}=\int x\,\rho\,dx$. Таким образом, управляющее уравнение будет справедливым для любого индекса α_1. В итоге получается замкнутая система трех уравнений (с определенной выше желаемой функцией распределения ρ_*):

$$\frac{1}{2}u^T u+\kappa\left\langle \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial Q}{\partial x_l^{(\alpha_1)}}\cdot\left(F_l(x^{(\alpha_1)},u,t)-F_{l,0}(x^{(\alpha_1)},t)\right)\right\rangle=0 \tag{2.7}$$

— (управляющее уравнение;

$$Q\equiv(\rho-\rho_*)^2 \quad \text{— определение целевой функции;} \tag{2.8}$$

$$\rho(x)=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\prod_{\beta=1}^{n}\delta_{1,2}\left(x_\beta - x_\beta^{(\alpha)}\right) \quad \text{— определение функции плотности.} \tag{2.9}$$

Для гладкой модели (2.5) дельта-функции итоговое уравнение принимает вид [9]:

$$\frac{1}{2}u^T u+\frac{4\kappa}{\varepsilon^2}\left\langle(\rho-\rho_*)\sum_{l=1}^{n}\left[(\rho-\rho_*)\,x_l-\left(\rho\cdot x_l^{(\alpha)}-\rho_*\cdot x_{l,*}^{(\alpha)}\right)\right]\cdot\left(F_l^{(\alpha)}-F_{l,0}^{(\alpha)}\right)\right\rangle=0\,, \tag{2.10}$$

где использовано обозначение: $F^{(\alpha)}\equiv F(x^{(\alpha)},u,t)$.

В целом компьютерное моделирование статистического контроля является более сложным, чем в стандартной нестатистической схеме. Для каждого временного шага dt нужно вычислять соответствующую функцию плотности ρ, а на ее основе — находить средние и переопределять управляющий сигнал u.

Один из стандартных примеров приложения теории управления — плоский модулированный осциллятор Капицы, представляющий собой математический маятник с вибрирующей горизонтально и/или вертикально точкой подвеса [10]. При определенных условиях модуляции порождаются дополнительные положения равновесия.

Приложим нашу схему статистического управления к осциллятору Капицы. Введем динамическую систему с $u \in \mathrm{R}^1$ и $x \equiv (q, v)^T$, где $v \equiv \dot{q}$. Сила из выражения (1.10) линейна по u:

$$f^{(\alpha)} = f_0(q^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}) - u \cdot g(q^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}) \equiv f_0^{(\alpha)} - u \cdot g^{(\alpha)}, \qquad (2.11)$$

а для квазиклассической системы из работы [3]:

$$g(q, v) = \beta v + \omega^2 \sin q\,; \;\; \beta, \omega = \mathrm{const}\;. \qquad (2.12)$$

Определим для простоты желаемые значения: $q_*^{(\alpha)} = 0$ и $v_*^{(\alpha)} = 0$ для любого индекса α. Тогда общая форма управляющего уравнения (2.10) может быть представлена как:

$$u(q, v) = \frac{8\kappa}{\varepsilon^2} \left\langle (\rho - \rho_*)\, g^{(\alpha)} \left[(\rho - \rho_*)\, v - \rho\, v^{(\alpha)} \right] \right\rangle, \qquad (2.13)$$

где

$$\rho = \frac{1}{\pi N \varepsilon^2} \sum_{\alpha_1 = 1}^{N} \exp\left\{ -\frac{1}{\varepsilon^2} \left[(q - q^{(\alpha_1)})^2 + (v - v^{(\alpha_1)})^2 \right] \right\}; \qquad (2.14)$$

$$\rho_* = \frac{1}{\pi N \varepsilon^2} \sum_{\alpha_2 = 1}^{N} \exp\left\{ -\frac{1}{\varepsilon^2} \left[q^2 + v^2 \right] \right\} = \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \exp\left\{ -\frac{1}{\varepsilon^2} \left[q^2 + v^2 \right] \right\}. \qquad (2.14а)$$

Наконец:

$$u(q, v) = \frac{8\kappa}{\varepsilon^2} (\rho - \rho_*)^2 \left(\beta \overline{v} + \omega^2 \sin \overline{q} \right) \left[v - \frac{\rho}{\rho - \rho_*} \overline{v} \right]. \qquad (2.15)$$

Такая форма управляющего сигнала сильно отличается от вычисленной в работе [3], поскольку она зависит не от пространственной координаты отдельной частицы, но содержит информацию о функции распределения частиц в ансамбле.

3. Временные корреляционные функции для управляемых динамических систем

Автокорреляционная функция часто используется при исследовании сложных режимов движения и весьма эффективно характеризует эволюцию нелинейной динамической системы [11]. Так, периодическому или квазипериодическому поведению отвечает периодическая или квазипериодическая автокорреляционная функция соответственно. Хаотическому режиму сопоставляется автокорреляционная функция, стремящаяся к нулю по мере возрастания времени.

Пусть $x_i(t) = \{x_1(t), ..., x_n(t)\}$ — одно из решений динамического уравнения (1.1). Рассмотрим только одну компоненту решения $x(t) \equiv x_m(t)$. Автокорреляционной функцией называется среднее по некоторому временному интервалу T (при $T \to \infty$):

$$C_{xx}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)x(\tau+t)d\tau \,. \tag{3.1}$$

Аналогично можно определить временную корреляционую функцию двух величин: $x(t)$ и $y(t)$:

$$C_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)y(\tau+t)d\tau \,. \tag{3.2}$$

Другой характеристикой системы является *спектральная плотность* (или просто *спектр*), тесно связанная с автокорреляционной функцией. Скажем, периодическая динамика системы с периодом T_1 (когда точка на фазовой плоскости движется по предельному циклу) порождает дискретный спектр — узкие линии на частоте движения $\omega_1 = 2\pi / T_1$ и на кратных гармониках $2\omega_1$, $3\omega_1$ и т. д. Квазипериодическому движению с несоизмеримыми частотами $\omega_1, ..., \omega_m$ отвечает спектр из m линий, соответствующих этим частотам и кратным им гармоникам. У хаотического режима спектр будет сплошным.

Спектральная плотность определяется формулой

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T}\left|X(\omega)\right|^2 , \tag{3.3}$$

где $X(\omega)$ — коэффициенты Фурье для функции $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_0^T x(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega\cdot t} dt \,. \tag{3.4}$$

Можно показать [11], что

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^T \cos(\omega\cdot\tau) C_{xx}(\tau)\, d\tau \,. \tag{3.5}$$

Например, для периодической функции с периодом T_1 имеем $x(t) = x(t+T_1)$. Разложим ее в ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{-in\omega_1 t},$$

где c_n — коэффициенты Фурье, $\omega_1 = 2\pi / T_1$. Тогда автокорреляционная функция равна:

$$C_{xx}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_{-n}\, \mathrm{e}^{-in\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2 \mathrm{e}^{-in\omega_1 t},$$

при вычислении $C_{xx}(t)$ использовано свойство $c_n = c_{-n}^{*}$ (так как функция $x(t)$ — вещественная). Следовательно, автокорреляционная функция тоже имеет период T_1. Ей соответствует спектральная плотность

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2 \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-i(n\omega_1-\omega)\tau} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2 \delta(\omega - n\omega_1),$$

представляющая собой дискретный спектр с основной частотой движения ω_1 и гармониками $n\omega_1$; $n = 1, 2, \dots$.

В данной статье мы не обсуждаем численные методы анализа поведения динамических систем на основе исследования спектров как таковых, поскольку это требует отдельного, весьма подробного обсуждения.

Несмотря на то, что исследование характера спектров позволяет характеризовать степень хаотичности поведения нелинейной системы, в теории управления подробно недостаточно обсуждался вопрос о качественном характере изменения спектра системы при наложении на нее управления. Насколько существенно спектр системы перестраивается при наличии управления и отражается ли существенным образом конкретная схема управления в устройстве спектра системы — в общем случае эти вопросы остаются открытыми.

Обратимся снова к «сквозному» примеру статьи — модели маятника Капицы. Остановимся для простоты только на вертикальных модуляциях. Динамическое уравнение имеет вид

$$ml^2 \cdot \ddot{\varphi} + \rho \cdot \dot{\varphi} + mgl \sin\varphi = mlu \sin\varphi, \tag{3.6}$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения от вертикали (значение $\varphi = 0$ соответствует нижнему положению равновесия), а $u = u(t)$ является вертикальным ускорением точки подвеса, $\rho \geq 0$ — коэффициент трения. Нижнее положение равновесия $\varphi = 0$ устойчиво всегда. Однако гармоническое ускорение (быстрая вибрация) $u(t) = A\omega^2 \sin \omega t$ приводит к тому, что перевернутое положение равновесия $\varphi = \pi$ также становится стабильным при выполнении условия

$$\frac{A^2\omega^2}{2gl} > 1 . \tag{3.7}$$

Такая схема называется вибрационным управлением [12].

При этом автокоррелятор управляющего сигнала есть

$$C_{uu}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u(\tau)u(\tau+t)d\tau = \frac{1}{2}A^2\omega^4 \cos \omega t . \tag{3.8}$$

Принципиально другим поведением эта функция отличается в случае ансамбля частиц. Обратимся к теории управления в форме метода скоростного градиента. Определим целевую функцию[2] как

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = H_* , \tag{3.9}$$

где

$$H(t) = \frac{ml^2}{2}(\dot{\varphi})^2 + mgl \cdot (1-\cos\varphi) \tag{3.10}$$

— энергия осциллятора. Тогда метод скоростного градиента позволяет получить сигнал:

$$u(t) = -\gamma(H - H_*)\dot{\varphi} \cdot \sin\varphi \tag{3.11}$$

или

$$u(t) = -\gamma \cdot \mathrm{sign}[(H - H_*)\dot{\varphi} \cdot \sin\varphi] . \tag{3.11a}$$

Стабилизация в перевернутом положении соответствует желаемому значению

$$H_* = 2mgl . \tag{3.12}$$

[2] Для управляемой гамильтоновой системы с малой диссипацией ρ уровень энергии, достижимый при помощи управления уровня γ, имеет порядок $(\gamma/\rho)^2$. Этот важный результат теории управления [1] налагает ограничения на численные значения γ и ρ. В данной статье мы полагаем это условие выполненным.

Пространство состояний управляемого маятника Капицы двумерно: $x_1 = \varphi$ и $x_2 = \dot{\varphi}$. Мы должны решить задачу Коши системы ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2\,; \\ \dot{x}_2 = -\beta \cdot x_2 - \dfrac{(g-u)}{l}\sin x_1\,. \end{cases}$$

Здесь использовано обозначение: $\beta = \rho / ml^2$.

Обратная связь реализуется в виде сигнала

$$u(x_1, x_2) = -\gamma(H - H_*)x_2 \sin x_1$$

с энергией:

$$H = mgl\left[\frac{l}{2g}x_2^2 + 1 - \cos x_1\right].$$

Исследуем поведение автокоррелятора:

$$C_{uu}(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(\tau)u(\tau+t)d\tau =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{\gamma^2}{T}\int_0^T \big(H(\tau)-H_*\big)\big(H(\tau+t)-H_*\big)\dot{\varphi}(\tau)\sin\varphi(\tau)\dot{\varphi}(\tau+t)\sin\varphi(\tau+t)\;d\tau\,.$$

Так как целевая функция (3.9) выводит гамильтониан на желаемый уровень (3.12), то $C_{uu} \to 0$ при $t \to \infty$. Аналогичный вывод можно сделать для $C_{ux_1} \to 0$ при $t \to \infty$, поскольку значения $x_1 = \varphi$ у маятника Капицы финитны.

4. Аппарат временных корреляционных функций в статистических управляемых ансамблях

Можно приложить аппарат корреляционных функций и к статистическим управляемым моделям. Обозначим через $x(t)$ полный набор координат пространства состояний, и пусть $A(x(t);t)$ будет некоторой функцией от них. Используя (1.1), мы для краткости обозначим ее через $A(t)$. Определим временную корреляционную функцию от $A(t)$ как

$$C_{AA}(t) = \langle A(0)A(t)\rangle = \int dx\, A(x;0)\, A(x;t)\rho(x)\;, \qquad (4.1)$$

где ρ — функция плотности для данного ансамбля. Аналогично вводится временная корреляционная функция C_{AB} от двух функций в пространстве состояний, $A(x(t);t)$ и $B(x(t);t)$, т. е. $\langle A(0)B(t)\rangle$. Дополнительно можно ввести обобщенный спектр (susceptibility) $\psi(\omega)$ в виде [13]:

$$\psi(\omega)=\int_0^\infty dt\ \mathrm{e}^{-i\omega\cdot t}\left\langle A(0)B(t)\right\rangle . \tag{4.2}$$

Предел нулевой частоты этого выражения называется в статистической механике коэффициентом переноса (transport coefficient). Когда $A = B$, корреляционная функция часто называется автокорреляционной.

Поскольку функция распределения была выбрана в форме дельта-функции (2.6), интеграл (4.1) может быть взят и представлен в форме

$$C_{AA}(t)=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}A(x^{(\alpha)}(0);0)A(x^{(\alpha)}(t);t))\ ; \tag{4.3}$$

$$C_{AB}(t)=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}A(x^{(\alpha)}(0);0)B(x^{(\alpha)}(t);t))\ . \tag{4.3a}$$

Применим теперь аппарат корреляционных функций к управляемому сигналом (2.15) маятнику Капицы. Из выражения (4.3) следует:

$$\begin{gathered}C_{uu}(t)=\frac{1}{N}\left(\frac{8\kappa}{\varepsilon^2}\right)^2\sum_{\alpha=1}^{N}(\rho(0)-\rho_*)^2\left(\beta\,\overline{v}_0+\omega^2\sin\overline{q}_0\right)\left[v^{(\alpha)}(0)-\frac{\rho(0)}{\rho(0)-\rho_*}\overline{v}_0\right]\times\\ \times(\rho(t)-\rho_*)^2\left(\beta\,\overline{v}(t)+\omega^2\sin\overline{q}(t)\right)\left[v^{(\alpha)}(t)-\frac{\rho(t)}{\rho(t)-\rho_*}\overline{v}(t)\right].\end{gathered} \tag{4.4}$$

Даже без существенных вычислений можно сделать ряд определенных выводов. Прежде всего, из выражений (4.4) и (2.8) следует, что $C_{uu}(t)$ пропорциональна функции цели $Q(t)$. С помощью функции (1.2) можно заключить, что

$$\lim_{t\to\infty}C_{uu}(t)\to 0\ . \tag{4.5}$$

Другими словами, автокорреляционная функция управляющего поля имеет нулевой предел в бесконечном пределе времени (она стремится к нулю настолько быстро, насколько целевая функция стремится к желаемой), т. е. управляющий сигнал не имеет памяти, если управление осуществляется достаточно долгое время.

Потребуем теперь $\bar{v}_0 = 0$ и используем нормировку $8\kappa\omega^2 \sin\bar{q} / \varepsilon^2 = 1$. Для грубой оценки положим $\bar{v}(t) \cong 0$. Тогда (4.4) может быть переписано:

$$C_{uu}(t) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(\rho(0)-\rho_*)^2(\rho(t)-\rho_*)^2\,\frac{\sin\bar{q}(t)}{\sin\bar{q}_0}\,v^{(\alpha)}(0)v^{(\alpha)}(t) \quad . \tag{4.6}$$

Обратимся теперь к обсуждению корреляций между управляющим сигналом u и функцией плотности:

$$C_{\rho u}(t) = \int dx\,\rho(x;\,0)\,u(x;\,t)\rho(x,\,t) \quad . \tag{4.7}$$

С учетом (2.6) это эквивалентно:

$$C_{\rho u}(t) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\rho(x^{(\alpha)}(0);\,0)\,u(x^{(\alpha)}(t);\,t)) \quad . \tag{4.8}$$

Наконец, подставив (2.15) в выражение (4.8), получим

$$C_{\rho u}(t) = \frac{8\kappa}{N\varepsilon^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\rho(0)\;(\rho-\rho_*)^2\left(\beta\,\bar{v} + \omega^2\sin\bar{q}\right)\left[v^{(\alpha)} - \frac{\rho}{\rho-\rho_*}\,\bar{v}\right]. \tag{4.8}$$

Это означает, аналогично случаю $C_{uu}(t)$, что

$$\lim_{t\to\infty} C_{\rho u}(t) \to 0 \quad , \tag{4.5}$$

т. е. управляющий сигнал u не коррелирует во времени с собой и с другими принципиальными функциями (такими, как функция плотности) на больших временах управления.

Разумеется, у автокоррелятора функции плотности $C_{\rho\rho}(t)$ такое свойство отсутствует. Это означает, и этот факт следует из общей идеологии теории управления, что распределение частиц управляемого ансамбля автокоррелировано. Управляемая система содержит свою «память» об управлении внешним полем в функции распределения, но не в управляющем сигнале. Контролирующее поле воспроизводится на каждом шаге управления не столько из своих предыдущих состояний, сколько из текущего состояния функции распределения частиц. Другими словами, для каждого шага процедуры статистического управления значение управляющего сигнала u на предыдущем шаге не столь существенно.

* * *

Подытожим наши основные результаты.

1. В случае отдельной частицы и статистической системы введены корреляционные функции управляющего сигнала *u* и (для ансамбля частиц) функции плотности.

2. Автокорреляционные свойства управляющего сигнала существенно отличаются от таковых в моделях без управления — как в случае отдельной частицы, так и для статистической модели. Управляющий сигнал коррелирует во времени с собой и с другими функциями (такими, как функция распределения) в пределе больших времен управления. В случае ансамбля частиц для практической реализации управления это означает, что для вычисления управляющего сигнала важнее знать его текущее значение на предыдущем шаге и эволюцию функции распределения, нежели его собственную временную эволюцию.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Фрадков А. Л.* Кибернетическая физика. СПб., 2003.
2. *Brockett R. W.* Control theory and analytical mechanics / Geometric Control Theory. Lie Groups. V. VII. Eds. C. Martin, R. Hermann. Mat. Sci. Press, Brookine, MA, 1977. P. 1–48.
3. *Borisenok S. V., Rozhdestvensky Yu. V., Fradkov A. L., Andrievsky B. R., Matisov B. G.* Speed-gradient control of cooled atom dynamics in potential of standing wave / Proceedings of 2003 International Conference «Physics and Control». St. Petersburg, 2003. P. 909–912.
4. *Borisenok S. V., Rozhdestvensky Yu. V.* Coherent atomic beam-splitter control for nanoscale atom wave packet lithography / Proceedings of 2003 International Conference «Physics and Control». St. Petersburg, 2003. P. 906–908.
5. *Zabczyk J.* Mathematical Control Theory: An Introduction. Springer, 1992.
6. *Dorf R. C., Bishop R. H.* Modern Control Systems. Singapore: Pearson Education, 2004.
7. *Ghosh S.* Control Systems. Theory and Applications. Singapore: Pearson Education, 2004.
8. *Borisenok S. V.* Statistical control in dynamical non-linear systems / Proceedings of the Second International Conference «Physics and Control». St. Petersburg, 2005. P. 145–149.
9. *Borisenok S. V.* Statistical space control in non-linear systems: speed gradient method // The Journal of Prime Research in Mathematics. Volume 1. 2005. № 1. P. 145–155.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М., 2001.
11. *Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С.* Введение в синергетику. М., 1990.
12. *Блехман И. И.* Вибрационная механика. М., 1994.
13. *McQuarrie D. A.* Statistical mechanics. Sausalito: University Science Books, 1993.

S. Borisenok

CORRELATION FUNCTIONS IN CONTROLLED SYSTEMS OF NON-LINEAR DYNAMICS

The time-correlation function formalism is discussed to investigate the correlation properties of dynamical systems controlled by the speed gradient method. For the practical purposes of physics modeling the control schemes for a single particle and for an ensemble of particles are presented. Auto-correlation properties for the controlling signal are completely different from the non-controlled models both for a single particle case and for the statistical model.