С. Е. Холодова

ВЛИЯНИЕ РЕЛЬЕФА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ВОЗДУШНЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ВОЛНЫ

Статья посвящена моделированию движения сжимаемой бароклинной жидкости. Рассматриваются вопросы, связанные с влиянием рельефа земной поверхности на воздушные течения и волны. В частности, исследуются волны, возникающие при адиабатическом движении около неровности поверхности Земли. При этом, в отличие от модели мелкой воды, используется теоретическая модель, учитывающая поле вертикальных скоростей.

При решении разнообразных задач современной авиации приходится совершать полеты над горными районами. Самолеты с реактивными двигателями (скоростные) летают заметно выше гор — на высотах от 5 до 12 км, причем, как правило, вдоль рекомендованных трасс. Поршневые самолеты (легкомоторные) летают на высотах до 5 км, зачастую — ниже горных вершин (над долинами, вдоль ущелий), при этом используются правила визуального полета, а высота над поверхностью Земли обычно меньше 500 м [1]. Опасность работы авиации в этих районах существенно зависит от состояния атмосферы. Нередко пилоты попадают в особую ситуацию, под которой понимают совокупность условий, приводящих к снижению уровня безопасности полета вследствие воздействия среды. Разные по степени опасности ситуации могут возникать при самых различных метеорологических процессах.

В данной статье внимание обращено на учет возмущений, возникающих при обтекании гор движущейся атмосферой.

В работе [2], где собран и проанализирован ряд авиапроисшествий, отмечается, что причиной гибели некоторых самолетов над горами было возмущение, порожденное взаимодействием движущейся атмосферы с неровностями рельефа, когда скорость потока была высока, а его направление было перпендикулярным к хребтам.

Использование различных методов изучения этой проблемы имеют давнюю историю [3]. Из более поздних исследований отметим работы [2, 4, 5]. В этих работах атмосфера моделируется как несжимаемая среда. В данной же работе учитывается сжимаемость атмосферы.

Ряд исследователей в поисках решения данной проблемы применяют упрощение теории мелкой воды. В работе [6] исследуется вопрос, при каких профилях скорости, высоте горы и условиях на верхней границе возмущения не являются малыми. Во многих работах осуществляется построение многослойных моделей как одного из способов простыми средствами учесть при моделировании обтекания гор те отдельные факторы, которые не удается рассмотреть во всей совокупности. Наибольшее число таких работ выполнено в рамках линеаризованного приближения. Систематическое изложение этих исследований дано в работе [7]. Но здесь нет анализа физики тех эффектов, которые должны ожидаться при использовании многослойных моделей. Например, в работе [8] подчеркивается, что многослойный подход выявляет возможность усиления возмущений в отдельных (в том числе вышележащих) слоях атмосферы за счет отражения энергии от поверхностей раздела, т.е. выявляет возможность как бы появления вторичных источников волновой энергии в вышележащих слоях.

Следует отметить, что при применении многослойного моделирования упрощение задачи внутри слоя усложняет проблему сопряжения решений на поверхностях раздела. В связи с этим представляется, что исследование этих вопросов в рамках линеаризованного приближения с учетом сжимаемости атмосферы следует продолжать. Попытка такого исследования отражена в настоящей статье.

Рассмотрим установившееся адиабатическое движение бароклинной сжимаемой жидкости со свободной границей над неровностью земной поверхности в поле силы тяжести.

Обратимся к общей системе уравнений гидромеханики и выпишем ее для стационарной плоской задачи. Исследуем движение жидкости в плоскости Oxy. Направим ось x горизонтально вправо, а ось y — вертикально вверх. Пусть $v_x = v_x(x,y)$, $v_y = v_y(x,y)$ — компоненты скорости, $\rho = \rho(x,y)$ — плотность, $p = p(x,y)$ — давление.

Необходимо удовлетворить двум уравнениям движения:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g, \tag{2}$$

где g — величина ускорения силы тяжести,
уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

и уравнению притока энергии — условию адиабатичности движения:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} + v_x \frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\rho^\kappa} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\frac{p}{\rho^\kappa} = 0. \tag{4}$$

Таким образом, имеем четыре уравнения (1)–(4) для определения четырех функций: v_x, v_y, ρ, p. Здесь $\kappa = \dfrac{C_p}{C_v}$ — отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Обратимся к краевым условиям. Рассмотрим обтекание земной поверхности установившимся воздушным потоком, который при $x \to -\infty$, т. е. далеко перед горой, был горизонтальным. Скорость $U(y)$ этого невозмущенного потока считается известной. Предполагается, что распределение плотности потока по высоте $\tilde{\rho}$ в невозмущенном движении при $x \to -\infty$ есть известная функция высоты y. Тогда распределение давления $\tilde{p}$ при невозмущенном движении известно и связано с $\tilde{\rho}$ барометрической формулой

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = -\tilde{\rho}(y) g. \qquad (5)$$

Считаем, что движение происходит в некоторой полосе, ширина которой H в невозмущенном положении является заданной. Над этой полосой жидкость покоится. Пусть уравнение неровности земной поверхности имеет вид $y = \zeta(x)$. В качестве одного из краевых условий потребуем равенства нулю составляющей скорости на поверхности $y = \zeta(x)$:

$$v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} = v_y, \quad y = \zeta(x).$$

На верхней границе потока должно иметь место непрерывное равенство давлений при переходе из области движения в область покоя. Пусть уравнение поверхности струи имеет вид

$$y = H + \eta(x). \qquad (6)$$

В области покоя давление равно $\tilde{p}$. Следовательно, $p\big|_{y=H+\eta} = \tilde{p}\big|_{y=H}$. Вид функции $\eta(x)$ заранее не известен. Чтобы поверхность (6) была поверхностью тока, необходимо потребовать выполнение равенства

$$v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_y, \quad y = H + \eta(x).$$

В силу уравнения неразрывности (3)

$$\rho v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \rho v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Функция $\psi = \psi(x, y)$ на линии тока, определяемой уравнением $v_y \, dx = v_x \, dy$, постоянна и называется функцией тока.

Рассмотрим уравнение (4). Используя функцию тока $\psi = \psi(x, y)$, получаем уравнение вида

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{p}{\rho^{\kappa}} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{p}{\rho^{\kappa}} = 0$$

или

$$\frac{D\left(\dfrac{p}{\rho^{\kappa}}, \psi\right)}{D(x,y)} = 0, \qquad (7)$$

где в записи использован функциональный определитель

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \end{vmatrix}.$$

Из уравнения (7) следует, что $\frac{p}{\rho^{\kappa}}$ зависит от ψ, т. е.

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = \tilde{C}(\psi), \tag{8}$$

где $\tilde{C}(\psi)$ постоянна на линии тока. Отсюда

$$\rho = \left(\frac{p}{\tilde{C}(\psi)}\right)^{\frac{1}{\kappa}}, \tag{9}$$

поэтому

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p,\psi)} = \tilde{C}^{\frac{1}{\kappa}}(\psi)\int p^{-\frac{1}{\kappa}}\,dp = \tilde{C}^{\frac{1}{\kappa}}(\psi)\frac{\kappa}{\kappa-1}p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \tag{10}$$

Уравнения (1)–(2) допускают интеграл Бернулли:

$$\frac{1}{2\rho^2}\left|\nabla\psi\right|^2 + gy + P = C(\psi), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{11}$$

где величина $C(\psi)$ сохраняет свое постоянное значение на каждой линии тока. После применения выражений (9), (10) интеграл Бернулли (11) примет вид

$$\frac{1}{2}\tilde{C}^{\frac{2}{\kappa}}(\psi)p^{-\frac{2}{\kappa}}\left|\nabla\psi\right|^2 + gy + \tilde{C}^{\frac{1}{\kappa}}(\psi)\frac{\kappa}{\kappa-1}p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = C(\psi).$$

Запишем уравнения (1)–(2) в форме Громеки—Ламба:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) - v_y\Omega = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right) + v_x\Omega = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g. \tag{12}$$

Здесь $v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2$, $\Omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$ — вихрь скорости. Продифференцировав первое уравнение по y, второе — по x, сложив полученные равенства почленно, используя функцию тока ψ и соотношение (9), получим следующее уравнение:

$$\begin{gathered}\Delta\psi = \left(\frac{p}{\tilde{C}(\psi)}\right)^{\frac{2}{\kappa}} C'(\psi) + \frac{1}{\kappa p}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \\ - \frac{\tilde{C}'(\psi)}{\kappa\tilde{C}(\psi)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}^2 + \frac{\partial\psi}{\partial y}^2\right) + \frac{\tilde{C}'(\psi)}{1-\kappa}\left(\frac{p}{\tilde{C}(\psi)}\right)^{\frac{1+\kappa}{\kappa}},\end{gathered} \tag{13}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Выражение для вихря скорости через функцию тока имеет вид

$$\Omega=-\left(\frac{\widetilde{C}(\psi)}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\Delta\psi+\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\widetilde{C}(\psi)}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\left[\nabla\psi\cdot\nabla\ln p-\frac{\widetilde{C}'(\psi)}{\widetilde{C}(\psi)}|\nabla\psi|^2\right].$$

Итак, задача сводится к определению функций $\psi=\psi(x,y)$ и $p=p(x,y)$ из уравнений (12), (13) в частных производных и граничных условий:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{d\zeta}{dx},\quad y=\zeta(x), \tag{14}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{d\eta}{dx},\quad y=H+\eta(x), \tag{15}$$

$$p\big|_{y=H+\eta}=\widetilde{p}\big|_{y=H}, \tag{16}$$

$$\widetilde{p}(y)=g\int_0^y\left(\frac{p}{\widetilde{C}(\psi)}\right)^{\frac{1}{\kappa}}dy+p_\infty^0,\ \text{при}\ x\to-\infty, \tag{17}$$

$$\widetilde{\psi}(y)=g\int_0^y\left(\frac{p}{\widetilde{C}(\psi)}\right)^{\frac{1}{\kappa}}v_{x\infty}\,dy,\ \text{при}\ x\to-\infty. \tag{18}$$

Определим константы $\widetilde{C}(\psi)$ и $C(\psi)$ из граничных условий (17), (18). Будем считать, что скорость невозмущенного потока U не зависит от высоты, то есть $U=\text{const}$, и распределение плотности по высоте $\tilde{\rho}$ в невозмущенном движении имеет вид

$$\tilde{\rho}(y)=\rho_0\exp(\alpha y),\quad \alpha<0.$$

Тогда

$$\widetilde{\psi}(y)=\frac{U\rho_0}{\alpha}\exp(\alpha y),\quad \widetilde{p}(y)=p_0-\frac{g\rho_0}{\alpha}\exp(\alpha y).$$

Таким образом, из выражений (8) и (11) находим

$$\tilde{C}(\psi)=\frac{U^{\kappa-1}\left(p_0U-g\psi\right)}{\left(\alpha\psi\right)^{\kappa}},\qquad C(\psi)=\frac{U^2}{2}+\frac{g}{\alpha}\ln\frac{\alpha\psi}{U\rho_0}+\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_0U-g\psi}{\alpha\psi}.$$

Подставив $\widetilde{C}(\psi),C(\psi)$ в уравнения (12) и (13), получим относительно ψ, ρ уравнения:

$$\Delta(\psi)=\left[\kappa p_0+\frac{g(1-\kappa)\psi}{U}\right]\left[\frac{\alpha}{(1-\kappa)U}\left(\frac{p}{p_0-\frac{g\psi}{U}}\right)^{\frac{2}{\kappa}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha}{(1-\kappa)U}\left(\frac{p}{p_0-\frac{g\psi}{U}}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}+\frac{|\nabla\psi|^2}{\kappa\psi\left(p_0-\frac{g\psi}{U}\right)}\right]+\frac{\nabla\psi\cdot\nabla p}{\kappa p}, \tag{19}$$

$$\frac{p^{-\frac{2}{\kappa}}|\nabla\psi|^2\left(p_0-\frac{g\psi}{U}\right)^{\frac{2}{\kappa}}}{2\left(\frac{\alpha\psi}{U}\right)^2}+gy+\frac{\kappa U p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\left(p_0-\frac{g\psi}{U}\right)^{\frac{1}{\kappa}}}{(\kappa-1)\alpha\psi}=$$
$$=\frac{U^2}{2}+\frac{g}{\alpha}\ln\frac{\alpha\psi}{U\rho_0}+\frac{\kappa\left(p_0U-g\psi\right)}{\alpha\psi}. \tag{20}$$

Найдем решение ψ, p в виде возмущения ψ' и p', накладываемого на невозмущенный поток $(\tilde{\psi},\tilde{p})$:

$$\psi(x,y)=\tilde{\psi}(y)+\psi'(x,y),\qquad p(x,y)=\tilde{p}(y)+p'(x,y). \tag{21}$$

Заметим, что $\psi'(x,y)=0$, $p'(x,y)=0$ при отсутствии препятствия. Будем считать, что неровность $y=\zeta(x)$ и образующиеся возмущения ψ', p' столь малы, что можно пренебречь всюду квадратами величин, снабженных штрихами. Тогда уравнение (19) запишется в виде

$$\Delta\psi'=\frac{\partial\psi'}{\partial y}f_1(y)+\frac{\partial p'}{\partial y}f_2(y)+p'f_3(y)+\psi'f_4(y). \tag{22}$$

Здесь и далее учитываем, что $\frac{U^2\tilde{\rho}}{\kappa\tilde{p}}<<1$. Действительно, по закону Клапейрона $\tilde{p}=\tilde{\rho}R\tilde{T}$, где R — газовая постоянная, $\tilde{T}$ — температура, величина $\kappa R\tilde{T}$ есть квадрат скорости звука $\tilde{a}^2$, поэтому

$$\frac{U^2\tilde{\rho}}{\kappa\tilde{p}}=\left(\frac{U}{\tilde{a}}\right)^2.$$

В атмосфере $\tilde{T}$ меняется в пределах от $225\ K$ (стратосфера) до $270-290\ K$ (Земля), $\tilde{a}\approx 3\cdot 10^4$ см/с при $\kappa=1{,}4, R=2{,}87\cdot 10^6$ см^2/с^2·град. Отсюда $\left(\frac{U}{\tilde{a}}\right)^2=10^{-3}$ [9]. В этом случае в уравнении (22)

$$f_1(y) = 2\alpha + \frac{g}{\tilde{a}^2}, \qquad f_2(y) = \frac{U}{\tilde{a}^2},$$

$$f_3(y) = \frac{\alpha}{U} + \frac{g}{U\tilde{a}^2}, \qquad f_4(y) = \frac{\alpha g}{U^2}\left(1 + \frac{g}{\alpha\tilde{a}^2}\right) - \alpha^2,$$

а уравнение (20) запишется в виде

$$U\frac{\partial\psi'}{\partial y} + g_1(y)\psi' + p' + \frac{\kappa}{\kappa - 1} = 0, \quad g_1(y) = -\frac{1}{U(\kappa - 1)}\left[\alpha\tilde{a}^2 + gk\right]. \tag{23}$$

Разрешив относительно $\frac{\partial p'}{\partial y}$ результат дифференцирования по y уравнения (23), получим

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = -U\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2} - g_1\frac{\partial\psi'}{\partial y} - g_1'\psi'. \tag{24}$$

Подставив $\frac{\partial p'}{\partial y}$ из (24) в выражение (22) и исключив из полученного уравнения давление p' с помощью (23), получим уравнение для функции ψ':

$$\Delta\psi' = \frac{\partial\psi'}{\partial y}m_1(y) + \psi' m_3(y) + m_2(y), \tag{25}$$

где

$$m_1(y) = f_1 - f_2 g_1 - Uf_3, \quad m_3(y) = f_4 - f_2 g_1' - gf_3, \quad m_2(y) = -f_3\frac{\kappa}{\kappa - 1},$$

или

$$m_1(y) = \frac{\kappa}{\kappa - 1}\left[\alpha + \frac{g}{\tilde{a}^2}\right], \quad m_2(y) = -\frac{\kappa}{U(\kappa - 1)}\left[\alpha + \frac{g}{\tilde{a}^2}\right],$$

$$m_3(y) = \frac{2\kappa\alpha g}{U^2(\kappa - 1)} + \frac{2\kappa - 1}{\kappa - 1}\frac{g}{U^2\tilde{a}^2} + \frac{\tilde{a}^2\alpha^2}{U^2(\kappa - 1)} + \frac{\alpha(\tilde{a}^2)'}{U(\kappa - 1)\tilde{a}^2}.$$

В краевом условии (15) пренебрежем произведением $\frac{d\zeta}{dx}\frac{\partial\psi'}{\partial y}$. С точностью до малых второго порядка (14) можно записать в виде

$$\frac{\partial\psi'}{\partial x} = -\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{d\zeta}{dx}, \qquad y = 0. \tag{26}$$

Далее, так как η считается малым, то

$$p\big|_{y=H+\eta} = \left(\tilde{p} + p'\right)\big|_{y=H+\eta} = \left(\tilde{p} + \frac{d\tilde{p}}{dy}\eta + p'\right)\Bigg|_{y=H+\eta}.$$

Используя соотношение (5), условие (16) можно записать в форме

$$p'\big|_{y=H} = g\tilde{\rho}\big|_{y=H} \cdot \eta. \tag{27}$$

Наконец, выражение (15) примет вид

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = -\frac{\partial \psi'}{\partial y} \cdot \frac{d\eta}{dx}, \qquad y = H. \tag{28}$$

Исключив функцию η из уравнений (27) и (28), получим:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = -\frac{U}{g} \cdot \frac{dp'}{dx}, \qquad y = H. \tag{29}$$

Подставив в (29) $\dfrac{\partial p'}{\partial x}$, найденное из уравнения (23), получим

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = -\frac{U^2}{g} \cdot \frac{\kappa - 1}{2\kappa - 1 + \dfrac{\alpha \tilde{a}^2}{g}} \cdot \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial y}, \qquad y = H. \tag{30}$$

Итак, задача сводится к определению функции $\psi'(x, y)$ из уравнения (25), краевого условия (30) и краевого условия

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = -U\rho_0 \frac{d\zeta}{dx}, \qquad y = 0. \tag{31}$$

Подстановка

$$\psi'(x, y) = \Psi(x, y) \exp\left(\frac{1}{2} \int m_1(y)\, dy \right) \tag{32}$$

приводит (25) к уравнению

$$\Delta \Psi + q_1(y) \Psi = q_2(y), \tag{33}$$

где

$$q_1(y) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_1}{\partial y} - \frac{m_1^2}{4} - m_3, \qquad q_2(y) = m_2 \exp\left(-\frac{1}{2} \int m_1(y)\, dy \right),$$

Или, с учетом выражений для m_1, m_2, m_3,

$$\begin{gathered} q_1(y) = \frac{g\kappa}{2(\kappa - 1)} \left(\frac{d\tilde{a}^2}{\partial y} \right)^{-1} - \frac{\kappa^2}{4(\kappa - 1)^2} \left[\alpha + \frac{g}{\tilde{a}^2} \right]^2 - \frac{2\kappa \alpha g}{(\kappa - 1)U^2} - \\ - \frac{2\kappa - 1}{(\kappa - 1)} \cdot \frac{g^2}{U^2 \tilde{a}^2} - \frac{\alpha^2 \tilde{a}^2}{(\kappa - 1)U^2} - \frac{\alpha}{(\kappa - 1)U\tilde{a}^2} \cdot \frac{d\tilde{a}^2}{dy}, \end{gathered} \tag{34}$$

$$q_2(y) = \frac{\kappa \left[\rho_0^{\frac{2-\kappa}{2}} \tilde{a} \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}} \left[\alpha + \dfrac{g}{\tilde{a}^2} \right]}{(\kappa - 1)U} \exp\left(-\frac{\alpha y}{2} \right). \tag{35}$$

В выражениях (34), (35)

$$\tilde{a}^2 = \kappa R\tilde{T}, \qquad \frac{d\tilde{a}^2}{dy} = \kappa R\frac{d\tilde{T}}{dy}.$$

В изотермической атмосфере $\left(\tilde{T} = \text{const}\right)$ в (34) $q_1 = \text{const}$. Наибольший интерес представляет случай, когда $\tilde{T}$ линейно зависит от высоты и мало отличается от своего среднего значения T_1. В условиях атмосферы можно, после дифференцирования по y, считать $\tilde{T}$ постоянным, равным T_1. В этом случае выражения для функций q_1 и q_2 в (34), (35) примут вид

$$q_1(y) = \frac{g}{2(\kappa-1)R\gamma} - \frac{\kappa^2}{4(\kappa-1)^2}\left[\alpha + \frac{g}{\kappa RT_1}\right]^2 - \frac{2\kappa\alpha g}{(\kappa-1)U^2} -$$

$$-\frac{2\kappa-1}{(\kappa-1)}\cdot\frac{g^2}{U^2\kappa RT_1} - \frac{\alpha^2\kappa RT_1}{(\kappa-1)U^2} + \frac{\alpha\gamma}{(\kappa-1)UT_1} = \text{const},$$

$$q_2(y) = \frac{\left[\kappa^\kappa \rho_0^{\frac{2-\kappa}{2}} RT_1\right]^{\frac{1}{\kappa-1}}\left[\alpha + \dfrac{g}{\kappa RT_1}\right]}{(\kappa-1)U}\exp\left(-\frac{\alpha y}{2}\right) = \text{const}\cdot\exp\left(-\frac{\alpha y}{2}\right).$$

Краевые условия (30), (31) после подстановки (32) примут вид

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \gamma_1\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}, \quad y = H, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \gamma_2\frac{d\zeta}{dx}, \quad y = 0, \tag{36}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{U^2(\kappa-1)}{\alpha\kappa RT_1 + g(2\kappa-1)}, \qquad \gamma_2 = \frac{U\rho_0(\kappa-1)}{\ln\left(p_0 - \dfrac{g\rho_0}{\alpha}\right)}.$$

Проинтегрировав условия (36) по переменной x, получим

$$\Psi = \gamma_1\frac{\partial\Psi}{\partial y} + C_H, \quad y = H, \qquad \Psi = \gamma_2\zeta + C_0, \quad y = 0,$$

где C_H и C_0 — константы. Учитывая условия на бесконечности, получим

$$C_H = \frac{u\rho_0}{\alpha}\exp(\alpha H), \qquad C_0 = \frac{u\rho_0}{\alpha}.$$

Итак, имеем задачу:

$$\Delta\Psi + q_1\Psi = q_2, \tag{37}$$

$$\Psi = \gamma_1\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{U\rho_0}{\alpha}\gamma_3, \quad y = H, \qquad \Psi = \gamma_2\zeta + \frac{U\rho_0}{\alpha}, \quad y = 0,$$

где $\gamma_3 = \exp(\alpha H)$. Полагая в (37)

$$\Psi(x,y)=S(x,y)+a_1(x)y+a_2(x), \tag{38}$$

где

$$a_1(x)=\frac{\dfrac{U\rho_0}{\alpha}(1-\gamma_3)+\gamma_2\zeta(x)}{(\gamma_3-H)}, \qquad a_2(x)=\gamma_2\zeta(x)+\frac{U\rho_0}{\alpha},$$

получим относительно $S(x,y)$ линейное неоднородное уравнение

$$\Delta S+q_1S=\Phi(x,y)\ , \tag{39}$$

где $\Phi(x,y)=q_2-y\left[a_1''(x)+q_1a_1(x)\right]-a_2''(x)-q_1a_2(x)$ и однородные краевые условия

$$S=0,\ \ y=H, \qquad S=\gamma_1\frac{\partial\psi}{\partial y},\ \ y=0. \tag{40}$$

Решение S задачи (39), (40) находим в виде

$$S(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(x)\sin\beta_n y, \tag{41}$$

где β_m — вещественные корни уравнения $\operatorname{tg}\beta_nH=\gamma_1\beta_n$. Учитывая, что функция $\Phi(x,y)$ в интервале $0\le y\le H$ представима рядом Фурье

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x)\sin\beta_n y$$

с коэффициентами

$$c_n(x)=\frac{2}{H}\int_0^H\Phi(x,y)\sin\beta_n y\,dy=$$

$$=\frac{2}{H\beta_n}\left\{(\gamma_1-H)(a_1''+q_1a_1)\cos\beta_nH+\left[q_2-(a_2''+q_1a_2)\right]\cos^2\frac{\beta_nH}{2}\right\},$$

относительно $S_n(x)$ получим краевую задачу

$$S_n''+\left(q_1-\beta_n{}^2\right)S_n=c_n(x), \qquad S_n(-\infty)=0,\ \ \left|S_n(+\infty)\right|<\infty,$$

имеющую единственное решение

$$S_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\int_{-\infty}^{x}c_n(\xi)\sin\left[\sqrt{\mu_n}(x-\xi)\right]d\xi,\ \ \mu_n=q_1-\beta_n{}^2>0.$$

Подставив $S_n(x)$ в равенство (41) и учитывая (38), (32), (21), получим

$$\psi(x,y)=\frac{U\rho_0}{\alpha}\exp(\alpha y)+\left\{\exp\left(\frac{\alpha\kappa y}{2(\kappa-1)}\right)\left(p_0-\frac{g\rho_0}{\alpha}\exp(\alpha y)\right)^{-\frac{1}{2(\kappa-1)}}\right\}\times$$
$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\beta_n y}{\sqrt{\mu_n}}\int_{-\infty}^{x}c_n(\xi)\sin\left[\sqrt{\mu_n}(x-\xi)\right]d\xi+a_1(x)y+a_2(x)\right\}.$$

По формуле (28) найдем соответствующее уравнение возмущенной поверхности жидкости. С точностью до малых второго порядка получим:

$$\eta(x)=-\frac{\exp(-\alpha H)}{U\rho_0}\psi'(x,y),$$

где

$$\psi'(x,y)=\left\{\exp\left(\frac{\alpha\kappa y}{2(\kappa-1)}\right)\left(p_0-\frac{g\rho_0}{\alpha}\exp(\alpha y)\right)^{-\frac{1}{2(\kappa-1)}}\right\}\times$$
$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\beta_n y}{\sqrt{\mu_n}}\int_{-\infty}^{x}\sin\left[\sqrt{\mu_n}(x-\xi)\right]c_n(\xi)\,d\xi+a_1(x)y+a_2(x)\right\}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Шелковников М. С.* Мезометеорологические процессы в горных районах и их влияние на полеты воздушных судов. Л., 1985. С. 183–196.
2. *Васильев А. А.* Атмосферная турбулентность, влияющая на полеты судов и ее прогноз: Дис. … д-ра геогр. наук. М., 1988.
3. *Forchtgot J.* Wave Streaming in the Lee Mountain Ridges // Bull. Meteorol. Czech. 1949. V. 3.
4. *Atkinson B. W.* Meso-scale Atmospheric Circulations. London; New York; Toronto; Sydney; San Francisco, 1981.
5. *Klemp J. B., Lilly D. K.* Numerical Simulation on Hydrostatic Mountain Waves // J. Atmos. Sci. 1978. V. 35. № 1. P. 78–107.
6. *Lee J. D., Su C. H.* A Numerical Method for Stratified Shear Flows Over a Long Obstacle // J. Geophys. Res. 1977. V. 82. № 3. P. 420–426.
7. *Госсард Э. Э., Хук У. Х.* Волны в атмосфере. М., 1978.
8. *Eliassen A., Palm E.* On the Transfer of Energy Stationary Mountain Waves // Geophys. Publ. 1960. V. 22. P. 1–23.
9. *Кочин Н. Е., Кибель И. А. Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М., 1963. Т. 1.

S. Kholodova

INFLUENCE OF TERRESTRIAL SURFACE RELIEF ON AIR CURRENTS AND WAVES

Modeling of movement compressible barocline liquid is in the focus of the paper. Issues related to the influence of terrestrial surface relief on air currents and waves are considered and waves arising at adiabatic movement about roughness of a surface of the earth are investigated. The theoretical model taking into account the field of vertical speeds is used.