А. В. Ласунский

ПОКАЗАТЕЛЬ ДАЛАМБЕРА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО СВОЙСТВА

Для исследования асимптотики решений линейных систем разностных уравнений с вполне ограниченной матрицей коэффициентов вводится понятие показателя Даламбера. Устанавливается связь этого показателя с показателями Ляпунова и Перрона, исследуются свойства показателя Даламбера.

Асимптотику решений линейной системы разностных уравнений

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ n \in Z^{+}, \tag{1}$$

где $A(n)$ — вполне ограниченная матрица [1], можно изучать с помощью различных показателей. Под характеристическим показателем действительной числовой последовательности $\{a_n\}$ понимают величину

$$\overline{\chi}[a_n] = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n} \ln|a_n|.$$

Если в правой части последнего равенства существует сам предел, то характеристический показатель называется строгим. О. Перроном предложен показатель [2]

$$\overline{\gamma}[a_n] = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \exp\left(\frac{1}{n}\ln|a_n|\right) = \exp \overline{\chi}[a_n], \tag{2}$$

с помощью которого он, а также Та Ли [3, 4], Ю. Г. Остапов [5] и некоторые другие авторы исследовали конечно-разностные уравнения.

Для действительной числовой последовательности $\{a_n\}$ рассмотрим показатель [6]

$$\overline{\nu}[a_n] = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \tag{3}$$

который назовем показателем Даламбера последовательности $\{a_n\}$. Аналогичный показатель рассматривали еще Пуанкаре и Перрон [7. С. 326–340].

Рассмотрим простейшие свойства показателя Даламбера.

1. $\overline{\nu}[Cx_n]=\overline{\nu}[x_n]$, $C\neq 0$.

2. $\overline{\nu}[x_n y_n]\leq\overline{\nu}[x_n]\overline{\nu}[y_n]$.

Предполагается, что последовательности имеют конечные показатели Даламбера.

3. Если x_n имеет строгий показатель Даламбера, то

$$\overline{\nu}[x_n y_n]=\nu[x_n]\overline{\nu}[y_n].$$

Справедливость последних двух утверждений вытекает из следующего свойства верхних пределов (см., например, [8. С. 99]): если положительные последовательности x_n и y_n имеют конечные верхние пределы, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n)\leq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$, причем если хотя бы одна из последовательностей x_n или y_n имеет конечный предел, то неравенство превращается в равенство.

4. Если $\overline{\nu}[a_n]<1$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

Действительно, если мы рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$, то, по признаку Даламбера, этот ряд абсолютно сходится, а тогда в силу необходимого признака сходимости ряда его общий член стремится к нулю.

5. Последовательность $\{a_n\}$, не имеющая нулевых членов, имеет строгий положительный показатель Даламбера тогда и только тогда, когда

$$\overline{\nu}[a_n]\cdot\overline{\nu}\left[\frac{1}{a_n}\right]=1.$$

Действительно, пусть существует $\nu[a_n]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>0$, тогда в силу свойства верхних пределов имеем

$$\overline{\nu}[a_n]\cdot\overline{\nu}\left[\frac{1}{a_n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}1=1.$$

И, наоборот, пусть $\overline{\nu}[a_n]\cdot\overline{\nu}\left[\frac{1}{a_n}\right]=1$, отсюда следует, что $\overline{\nu}[a_n]>0$. Так как для положительной последовательности x_n имеет место равенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}\cdot\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1$, то имеем $\overline{\nu}\left[\frac{1}{a_n}\right]\cdot\underline{\nu}[a_n]=1$, откуда $\overline{\nu}[a_n]=\underline{\nu}[a_n]$ и, следовательно, последовательность a_n имеет строгий положительный показатель Даламбера.

Для показателя Даламбера $\overline{\nu}[a_n]$ нельзя построить столь стройную теорию, какая построена для характеристических показателей. В отличие от характеристического показателя показатель Даламбера монотонностью не обладает. Для последовательностей $x_n = 2 + (-1)^n$, $y_n = 3$ имеем $x_n \le y_n$, но $\overline{\nu}[x_n] = 3 > \overline{\nu}[y_n] = 1$. Последовательности с различными показателями Даламбера могут оказаться линейно зависимыми:

$$x_n = 1, \quad y_n = 2 + (-1)^n, \quad z_n = 3 + (-1)^n.$$

Эти последовательности линейно зависимы, хотя имеют разные показатели Даламбера $\overline{\nu}[x_n] = 1, \quad \overline{\nu}[y_n] = 3, \quad \overline{\nu}[z_n] = 2$.

Если $x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_m(n) \end{pmatrix}$ — векторная числовая последовательность, то ее показателем Даламбера назовем величину $\overline{\nu}[x(n)] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{\|x(n+1)\|}{\|x(n)\|}$. Здесь $\|x(n)\|$ — евклидова норма вектора $x(n)$.

Заметим, что значение характеристического показателя $\overline{\chi}[x(n)] = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \dfrac{1}{n} \ln\|x(n)\|$ и значение показателя $\overline{\gamma}[x(n)] = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\|x(n)\|}$ не зависят от выбора нормы вектора, что следует из эквивалентности норм в конечномерном пространстве [9. С. 17; С. 460–461]. Значение показателя Даламбера зависит от выбора нормы вектора. В случае евклидовой нормы $\|x(n)\|_I = \sqrt{(x,x)}$ для вектора $x(n) = \begin{pmatrix} 1 + (-1)^n \\ 1 \end{pmatrix}$ имеем

$$\overline{\nu}_I[x(n)] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|x(n+1)\|_I}{\|x(n)\|_I} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt{3 + 2(-1)^{n+1}}}{\sqrt{3 + 2(-1)^n}} = \sqrt{5}.$$

Для нормы $\|x(n)\|_{II} = \sum\limits_i |x_i(n)|$ имеем

$$\overline{\nu}_{II}\left[x(n)\right] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|x(n+1)\|_{II}}{\|x(n)\|_{II}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n} = 3.$$

В дальнейшем будем всегда рассматривать евклидову норму. Впрочем, если вектор-функция $x(n)$ имеет строгий положительный показатель Даламбера $\nu[x(n)]$, то его величина не зависит от выбора нормы, причем $x(n)$ имеет строгий характеристический показатель и имеет место равенство [6] $\chi[x(n)] = \ln(\nu[x(n)])$.

Отметим очевидную связь показателей Ляпунова и Даламбера. Пусть $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\|x(n+1)\|}{\|x(n)\|}=\bar{\nu}$, тогда по определению верхнего предела для любого $\varepsilon>0$ $\|x(n)\|\le C(\bar{\nu}+\varepsilon)^n$ для всех достаточно больших n. В силу монотонности логарифма и верхнего предела $\bar{\chi}[x(n)]\le\ln(\bar{\nu}+\varepsilon)$ или $e^{\bar{\chi}}\le\bar{\nu}+\varepsilon$. Так как $\varepsilon>0$ произвольно, то $e^{\bar{\chi}}\le\bar{\nu}$. Оценка сверху $\bar{\nu}$ позволяет оценить сверху $\bar{\chi}$, но оценки для $\bar{\nu}$ получить легче.

Если матрица $A(n)$ системы (1) вполне ограничена, то из неравенства

$$\left(\left\|A^{-1}(n)\right\|\right)^{-1}\le\frac{\|x(n+1)\|}{\|x(n)\|}\le\|A(n)\|,$$

которое является аналогом неравенства Ляпунова из теории линейных систем дифференциальных уравнений, следует конечность и положительность показателя Даламбера любого нетривиального решения системы (1).

Отметим также, что если мы имеем для любого $n=0,1,2,...$ какую-нибудь оценку $a(n)\le\frac{\|x(n+1)\|}{\|x(n)\|}\le b(n)$, то из нее следует также оценка $\|x(0)\|\cdot\prod_{k=0}^{n-1}a(k)\le\|x(n)\|\le\|x(0)\|\cdot\prod_{k=0}^{n-1}b(k)$, из которой вытекает двусторонняя оценка для характеристического показателя. Отметим, что в работе [6] получены двусторонние оценки для $\frac{\|x(n+1)\|}{\|x(n)\|}$, которые являются дискретными аналогами неравенств Ляпунова, Богданова и Важевского из теории линейных систем дифференциальных уравнений. Эти оценки, как и соответствующие оценки в теории линейных систем дифференциальных уравнений, не инвариантны относительно ляпуновских преобразований [9. С. 129].

Отметим некоторые свойства показателя Даламбера решений линейной системы (1):

1. Если $U(n)$ — унитарная матрица, то $\bar{\nu}[x(n)]=\bar{\nu}[U(n)x(n)]$.

Справедливость этого свойства вытекает из того факта, что при унитарном преобразовании норма вектора не меняется.

2. Если решения разделенной системы (1) имеют строгие показатели Перрона, то система (1) правильна [10].

3. При λ-преобразовании $y(n)=\lambda^n x(n),\quad \lambda\ne0$, линейной системы (1) показатели Перрона преобразуются следующим образом:

$$\bar{\nu}[y(n)]=|\lambda|\cdot\bar{\nu}[x(n)].$$

Заметим, что λ-преобразование приводит систему (1) к виду

$$y(n+1)=\lambda\cdot A(n)y(n).$$

Уже для линейной системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами множество различных показателей Даламбера решений этой системы может иметь положительную меру.

П р и м е р . $\begin{cases} x_1(n+1) = -x_1(n) + x_2(n), \\ x_2(n+1) = \qquad\qquad x_2(n). \end{cases}$

Общее решение системы имеет вид $x_1(n) = C_1(-1)^n + \frac{1}{2}C_2, \quad x_2(n) = C_2$.

Для евклидовой нормы имеем $\overline{\nu}[x(n)] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{\dfrac{C_1^2 + C_1C_2(-1)^{n+1} + \frac{5}{4}C_2^2}{C_1^2 + C_1C_2(-1)^n + \frac{5}{4}C_2^2}}$.

Если $C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0$, то $\overline{\nu}[x(n)] = 1$. Если $C_2 \neq 0$, то, полагая $t = \dfrac{C_1}{C_2}$, имеем $\overline{\nu}[x(n)] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\dfrac{t^2 + t(-1)^{n+1} + \frac{5}{4}}{t^2 + t(-1)^n + \frac{5}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{t^2 + |t| + \frac{5}{4}}{t^2 - |t| + \frac{5}{4}} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим функцию $f(t) = \dfrac{t^2 + |t| + \frac{5}{4}}{t^2 - |t| + \frac{5}{4}}$. Так как $E(f) = \left[1; \ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$, то $1 \leq \overline{\nu}[x(n)] \leq \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Отметим, что аналог неравенства Важевского [6] дает оценку $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \overline{\nu}[x(n)] \leq \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Действительно, $A^*A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda(A^*A) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \Lambda(A^*A) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Если же собственные числа постоянной матрицы A системы (1) по модулю различны, то справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть собственные числа постоянной матрицы A системы $x(n+1) = Ax(n)$ m-го порядка по модулю различны:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_m|, \tag{4}$$

тогда для любого нетривиального решения системы $x(n)$ существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|x(n+1)\|}{\|x(n)\|}$, и он равен одному из чисел $|\lambda_k|$.

Доказательство. Так как все собственные числа матрицы A по модулю различны, то общее решение системы можно записать в виде (вообще говоря, комплексном) $x(n) = C_1\gamma_1\lambda_1^n + \ldots + C_m\gamma_m\lambda_m^n$. Здесь γ_k — собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_k. Пусть $C_1 = C_2 = \ldots = C_{p-1} = 0$ и $C_p \neq 0$. Покажем, что в этом случае для решения $x(n)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|x(n+1)\|}{\|x(n)\|} = |\lambda_p|$.

Действительно,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|x(n+1)\|}{\|x(n)\|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left\|\sum\limits_{i=p}^{m} C_i\gamma_i\lambda_i^{n+1}\right\|}{\left\|\sum\limits_{i=p}^{m} C_i\gamma_i\lambda_i^{n}\right\|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left\|C_p\gamma_p\lambda_p + \sum\limits_{i=p+1}^{m} C_i\gamma_i\lambda_i\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_p}\right)^n\right\|}{\left\|C_p\gamma_p + \sum\limits_{i=p+1}^{m} C_i\gamma_i\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_p}\right)^n\right\|}.$$

По непрерывности нормы с учетом неравенства (4) имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|x(n+1)\|}{\|x(n)\|} = \frac{\|C_p\gamma_p\lambda_p\|}{\|C_p\gamma_p\|} = |\lambda_p|.$$

Итак, если собственные числа матрицы *A* по модулю различны, то спектр показателей Даламбера совпадает с конечным множеством $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_m|$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Демидович В. Б.* Об асимптотическом поведении решений конечно-разностных уравнений. I. Общие положения // Дифференциальные уравнения. 1974. Т.10. № 12. С. 2267–2278.
2. *Perron O.* Über stabilität und asymptotisches Verhalten der Lősungen endlicher Differenzengleichungen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1929. Bd. 161. H. 1. 41–64.
3. *Ta Li.* Acta Math. 1933, 61, № 1–2. 81–104.
4. *Ta Li.* Acta Math. 1934, 63, № 1. 99–141.
5. *Остапов Ю. Г.* Об устойчивости движений дискретных динамических систем // Математическая физика: Республиканский межведомственный сборник. Вып. 6. Киев, 1969. С. 149–157.
6. *Ласунский А. В.* Оценки роста решений линейных систем разностных уравнений через коэффициенты и их приложение к вопросам устойчивости // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1931–1932. (Полностью статья депонирована в ВИНИТИ 27.9.95 № 2648 – В95. 12 с.).
7. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М., 1967.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. М., 1990.
9. *Былов Б. Ф. и др.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
10. *Ласунский А. В.* Аналог понятия интегральной разделенности в теории линейных систем разностных уравнений // Вестник Новгородского университета. Серия «Технические науки». 2004. № 28. С. 100–106.

A. Lasunsky

D'ALEMBERT EXPONENT OF THE SOLUTIONS OF THE LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENCE EQUATIONS AND ITS PROPERTIES

Asymptotic of the solutions of the linear systems of difference equations with completely bounded matrix of coefficients is explored by the introduction of d'Alembert exponent. The relation of this exponent with Lyapunov and Perron exponents is established. The properties of the d'Alembert exponent are investigated.