В. Ф. Зайцев, А. С. Ложкин

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается новый подход для поиска симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений — фундаментальных симметрий. Доказываются основополагающие теоремы, устанавливается ряд свойств, обсуждаются некоторые возможные приложения. Приводятся примеры.

V. Zaitsev, A. Lojkin

FUNDAMENTAL SYMMETRIES OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

A new approach to the search of symmetries of ordinary differential equations is described. A number of basic theorems are proved, some properties are identified, and possible applications are discussed, with examples provided.

Хорошо известно (см., например, работу [1]), что классический алгоритм поиска допускаемых операторов предполагает решение определяющего уравнения на многообразии, заданном исследуемым уравнением. Например, для уравнения второго порядка

$$H = y'' - F\left(x, y, y'\right) = 0 \tag{1}$$

определяющее уравнение выглядит следующим образом:

$$\Phi\frac{\partial H}{\partial y} + \Phi'\frac{\partial H}{\partial y'} + \Phi''\frac{\partial H}{\partial y''}\bigg|_{[H]} = 0, \tag{2}$$

где символ $\left[H\right]$ означает «на многообразии H и всех его дифференциальных следствиях». Если $\Phi = \Phi\left(x, y, y'\right)$, то, выражая y'' и y''' из уравнения (1) и его дифференциального следствия $D_x\left[H\right] = 0$, мы получаем вместо уравнения (2) выражение, зависящее только от первой производной y'. Если задана конкретная зависимость координаты канонического оператора Φ от третьего аргумента (например, для точечного оператора $\Phi = \eta\left(x, y\right) - \xi\left(x, y\right)y'$), полученное выражение можно «расщепить» по независимой переменной y' и прийти к определяющей системе. Как правило, мы можем найти все решения этой системы, так как число уравнений обычно больше числа неизвестных (т. е. система является переопределенной). Очевидным недостатком этого подхода является необходимость априорного задания типа симметрии. Естественно, для каждого следующего типа задача решается «с нуля».

Тем не менее, существует и другой подход: можно рассматривать инвариантность уравнения не на многообразии его решений, а на всем продолженном пространстве. По-видимому, этот подход известен с момента введения группового анализа в математическую практику, хотя привести конкретные ссылки весьма затруднительно: все сколько-нибудь значимые результаты применения группового анализа были достигнуты с помощью классического подхода. И это неудивительно — построение эффективного алгоритма применения альтернативного подхода сильно затруднено отсутствием «независимых переменных», по которым можно расщеплять определяющее уравнение.

Сложившаяся ситуация изменилась только в последнее десятилетие XX века, когда началось интенсивное изучение **нелокальных** симметрий. Оказалось, что нелокальная переменная может рассматриваться как независимая, в результате чего расщепление определяющего уравнения стало возможным на всем продолженном пространстве. Кроме того, как выяснилось, само по себе условие инвариантности обладает рядом свойств, позволяющих получить важную информацию о симметриях изучаемого уравнения.

Очевидно, условие инвариантности уравнения (1) на продолженном пространстве можно записать в виде

$$\Phi \frac{\partial H}{\partial y} + \Phi' \frac{\partial H}{\partial y'} + \Phi'' \frac{\partial H}{\partial y''} = 0. \tag{3}$$

Определение. Канонический оператор $X = \Phi\partial_y$, где Φ — решение уравнения (3), называется **фундаментальной симметрией** уравнения (1).

Совершенно аналогично определяются фундаментальные симметрии обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка как решения уравнения в полных производных n-го порядка

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Phi^{(k)} \frac{\partial H}{\partial y^{(k)}} = 0. \tag{3a}$$

Решением однородного уравнения (3) является не обычная функция $\Phi(x)$, а функционал $\Phi(x, y, y', ...)$ (действующий из продолженного пространства в пространство функций от x). Размерность алгебры фундаментальных симметрий определяется исключительно порядком исследуемого уравнения.

Теорема 1. Размерность алгебры фундаментальных симметрий обыкновенного дифференциального уравнения равно порядку определяющего уравнения, который совпадает с порядком исследуемого уравнения.

Доказательство в виде последовательных утверждений приводится ниже.

Замечание. Для каждого типа локальных симметрий размерность допускаемой алгебры обычных симметрий может быть либо больше, либо равна размерности алгебры фундаментальных симметрий данного типа. Например, для ОДУ 2-го порядка (1) размерность алгебры точечных операторов, согласно теореме Ли, может быть 0, 1, 2, 3 и 8, тогда как размерность алгебры фундаментальных точечных симметрий может быть лишь 0, 1 или 2.

Теорема 2. Фундаментальная точечная симметрия уравнения (1) имеет производящую функцию, не зависящую от производной. Иными словами, оператор фундаментальной точечной симметрии уравнения (1) имеет вид $X = \Phi\left(x, y\right)\partial_y$.

Доказательство. Докажем, что функция Φ зависит от x и y, т. е. $\Phi = \Phi\left(x, y\right)$. Предположим противное: пусть Φ зависит от производной по $y^{(k)}$ некоторого конечного порядка $k < \infty$. При подстановке в условии инвариантности (3) эта производная в третьем слагаемом перейдет в производную порядка *k+2* и не сократится ни с каким другим слагаемым, т.е. условие инвариантности не будет выполнено ни при какой функции $\Phi\left(x, y, y', \ldots,\ y^{(k)}\right)$. Например, пусть имеется зависимость от первой производной y', тогда после подстановки $\Phi\left(x, y, y'\right)$ в выражение (3) получим

$$-\Phi F_y - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y''\right) F_{y'} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\left(y'\right)^2 +$$
$$+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y'} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial y'} y'\right) y'' + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2}\left(y''\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y''' = 0 .$$

Поскольку переменные x, y, y', y'', y''' рассматриваются как независимые, можно «расщепить» это условие по степеням переменной y'''. Приравняв нулю коэффициент при первой степени y''', получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0 ,$$

т. е. функция Φ зависит только от x и y.

Теорема доказана.

Очевидно, уравнение (3) можно рассматривать как **обыкновенное дифференциальное уравнение в полных производных**, и методы его решения во многом аналогичны методам решения обычных дифференциальных уравнений. Заметим, что эта аналогия нетривиальна, выполненные недавно исследования показали, что для решения аналогичных уравнений в полных частных производных, возникающих при поиске «неклассических» симметрий нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, методы математической физики оказываются несостоятельными.

Тем не менее, в нашем случае мы можем воспользоваться хорошо известными методами теории линейных дифференциальных уравнений. Так, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Линейное однородное уравнение в полных производных первого порядка имеет одно и только одно фундаментальное решение.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\Phi \frac{\partial H}{\partial y} + \Phi' \frac{\partial H}{\partial y'} = 0 .$$

Очевидно, это уравнение можно проинтегрировать как уравнение с разделяющимися переменными. Имеем

$$\frac{\Phi'}{\Phi}=-\frac{\dfrac{\partial H}{\partial y}}{\dfrac{\partial H}{\partial y'}},$$

то есть

$$\Phi=e^{-\int\frac{\frac{\partial H}{\partial y}}{\frac{\partial H}{\partial y'}}dx}.$$

Таким образом, для уравнений первого порядка теорема 1 верна.

Далее, если известна одна фундаментальная симметрия уравнения (1), то мы можем найти вторую [2]. Пусть производящая функция известной фундаментальной симметрии — функция $\Phi_1(x,y,y',...)$. Будем искать Φ_2 в виде $\Phi_2=\Phi_1 U$, где U – новая неизвестная функция, которая будет удовлетворять уравнению

$$\Phi_1\frac{\partial H}{\partial y''}D_x^2[U]+\left(\Phi_1\frac{\partial H}{\partial y'}+2D_x[\Phi_1]\frac{\partial H}{\partial y''}\right)D_x[U]=0.$$

Выполнив замену $W=D_x[U]$, получим относительно W линейное однородное уравнение уже первого порядка, решbd которое получим

$$W=\Phi_1^{-2}e^{-D_x^{-1}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial y'}}{\frac{\partial H}{\partial y''}}\right]},$$

то есть

$$\Phi_2=\Phi_1 D_x^{-1}\left[\Phi_1^{-2}e^{-D_x^{-1}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial y'}}{\frac{\partial H}{\partial y''}}\right]}\right].$$

Здесь D_x — символ оператора полной производной, в уравнениях (2), (3) для краткости этот оператор обозначен штрихом ('), D_x^{-1} — символ оператора, обратного к оператору полной производной. Этот оператор называют еще **полным интегралом**. Мы будем в ряде случаев использовать знак интеграла, при необходимости указывая, что интеграл — полный. Заметим, что теперь для доказательства теоремы 1 нам остается доказать лишь, что любое однородное линейное уравнение в полных производных (3а) имеет хотя бы одно нетривиальное решение.

Теперь нам известны обе фундаментальные симметрии, и по ним можно найти вообще все симметрии уравнения (1), которые уже не будут фундаментальными. Для этого можно применить метод Лагранжа. Заметим, что уравнение (2) можно записать в виде неоднородного линейного уравнения, заменяя символ $[H]$ на правую часть уравнения – некоторую функцию, обращающуюся в нуль на $[H]$:

$$\Phi\frac{\partial H}{\partial y}+\Phi'\frac{\partial H}{\partial y'}+\Phi''\frac{\partial H}{\partial y''}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\left(x,y,y',...\right)D_x^k\left[H\right], \tag{4}$$

где A_k — произвольные функции из бесконечно-продолженного пространства.

Совершенно аналогично классическому методу Лагранжа ищем решение в виде

$$\Psi=C_1\left(x,y,y',...\right)\Phi_1\left(x,y,y',...\right)+C_2\left(x,y,y',...\right)\Phi_2\left(x,y,y',...\right),$$

где Φ_1,Φ_2 — фундаментальные решения исходного однородного уравнения, а C_1,C_2 — произвольные константы, которые мы рассматриваем как функции от всех переменных продолженного пространства.

Вычисляем последовательно производные функции Ψ, накладывая дополнительные условия на первые производные функций C_1,C_2. Получим

$$\Psi'=C_1\Phi'_1+C_2\Phi'_2+C'_1\Phi_1+C'_2\Phi_2,\ C'_1\Phi_1+C'_2\Phi_2=0,$$

$$\Psi''=C_1\Phi''_1+C_2\Phi''_2+C'_1\Phi'_1+C'_2\Phi'_2,$$

$$C'_1\Phi'_1+C'_2\Phi'_2=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\left(x,y,y',...\right)D_x^k\left[H\right].$$

Очевидно, что Ψ является решением неоднородного уравнения (4), если функции C_1,C_2 удовлетворяют линейной системе

$$\begin{cases}C'_1\Phi_1+C'_2\Phi_2=0,\\ C'_1\Phi'_1+C'_2\Phi'_2=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\left(x,y,y',...\right)D_x^k\left[H\right].\end{cases} \tag{5}$$

Так как Φ_1,Φ_2 линейно независимы, то вронскиан системы (5) не равен 0.

Из первого уравнения системы находим

$$C'_1=-C'_2\frac{\Phi_2}{\Phi_1},$$

из второго

$$C'_2 = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} A_k\left(x, y, y', ...\right) D_x^k\left[H\right]}{\Phi_2\left(\frac{\Phi'_2}{\Phi_2} - \frac{\Phi'_1}{\Phi_1}\right)}.$$

Интегрирование дает функцию C_2:

$$C_2 = D_x^{-1}\left[\frac{\sum_{k=0}^{\infty} A_k\left(x, y, y', ...\right) D_x^k\left[H\right]}{\Phi_2\left(\frac{\Phi'_2}{\Phi_2} - \frac{\Phi'_1}{\Phi_1}\right)}\right].$$

Соответственно для C_1 получим:

$$C_1 = -D_x^{-1}\left[\frac{\sum_{k=0}^{\infty} A_k\left(x, y, y', ...\right) D_x^k\left[H\right]}{\Phi_1\left(\frac{\Phi'_2}{\Phi_2} - \frac{\Phi'_1}{\Phi_1}\right)}\right].$$

Конкретные классы симметрий можно выделить и найти, наложив дополнительные условия на найденное общее решение уравнения (4) до перехода на многообразие (1). Заметим, что предложенный выше алгоритм нахождения всех симметрий уравнения применим и для операторов, в которых Φ_1 задана в виде бесконечного ряда, т. е. с нелокальной Φ.

Теперь завершим доказательство теоремы 1, для чего покажем, что любое уравнение (3а) имеет хотя бы одно нетривиальное решение в виде **формального степенного ряда**. Из-за громоздкости выкладок мы приведем лишь несколько первых шагов алгоритма на примере уравнения (3). Для уравнения (1) определяющее уравнение (3) можно записать в виде

$$\Phi'' - F_{y'}\Phi' - F_y\Phi = 0.$$

Пусть функция F может быть разложена в ряд Тейлора по третьему аргументу:

$$F\left(x, y, y'\right) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m\left(x, y\right)\left(y'\right)^m.$$

Тогда решение — функция Φ — можно разложить в обобщенный степенной ряд

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k\left(x, y, y', ..., y^{(k-1)}\right) y^{(k)}.$$

Вычислив полные производные Φ и подставив их в исходное уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\varphi_k y^{(k+2)}+\big(2D_x\varphi_k-F_{y'}\varphi_k\big)-\big(D_x^2\varphi_k-F_{y'}D_x\varphi_k-F_y\varphi_k\big)\Big]=0.$$

Очевидно, что наивысший порядок производной y в любом члене ряда равен k + 2, причем производная $y^{(k+2)}$ входит линейно и лишь в первое слагаемое каждого члена ряда. Это позволяет построить регулярный алгоритм, расщепляя полученное выражение по степеням производных (сравните с методом разложения решения линейного ОДУ в обобщенный степенной ряд). Так, при k = 0 коэффициент разложения (точнее, свободный член) равен

$$\varphi_0 y''+\big(2D_x\varphi_0-F_{y'}\varphi_0\big)y'-\big(D_x^2\varphi_0-F_{y'}D_x\varphi_0-F_y\varphi_0\big).$$

Так как следующие члены ряда обязательно содержат производные, можно выделить ту часть свободного члена, которая не содержит производных

$$\varphi_{0_{xx}}-f_1\varphi_{0_x}-f_0\varphi_0=0\,.$$

Это **обыкновенное** линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно $\varphi(x)$ (переменная y, от которой также зависит φ, является здесь параметром). Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$\varphi_0(x,y)=C_1(y)\varphi_{01}(x)+C_2(y)\varphi_{02}(x).$$

Подставив полученное решение в следующие коэффициенты ряда и выделив коэффициент при y' в первой степени, находим $C_1(y)$ и $C_2(y)$. Дальнейшие вычисления позволяют найти любое число членов ряда. Заметим, что у данного алгоритма нет принципиальных ограничений на порядок исследуемого уравнения.

Пробные расчеты (они не приводятся в силу их крайней громоздкости) показывают, что в ряде случаев удается «собрать» часть слагаемых в конечные выражения, а также найти рекуррентные формулы для вычисления следующих членов ряда либо вообще выписать общий член ряда.

Огромные возможности применения данного алгоритма порождает вопрос о возможности редукции простой симметрии в фундаментальную. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Любая симметрия обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка (1), заданная производящей функцией $\Phi(x,y)$, является фундаментальной симметрией равносильного ему уравнения *fH=0*, при этом множитель *f* равен $C\Phi^{-1}$, где C = const.

Доказательство. Пусть функция $\Phi(x,y)$ определяет канонический оператор, являющийся симметрией уравнения (1), тогда она удовлетворяет определяющему уравнению:

$$\Phi\frac{\partial H}{\partial y}+\Phi'\frac{\partial H}{\partial y'}+\Phi''\frac{\partial H}{\partial y''}\Big|_{y''=F}=0 .$$

Домножим H на $f\left(x,y,y'\right)$. Тогда определяющее уравнение запишется в следующем виде:

$$f\left(\Phi_{xx}+2\Phi_{xy}y'+\Phi_{yy}\left(y'\right)^2+\Phi_y y''\right)+\left(\Phi_x+\Phi_y y'\right)H_{y'}f+$$
$$+\left(\Phi_x+\Phi_y y'\right)Hf_{y'}+\Phi H_{y'}f+\Phi Hf_y=0 .$$

Расщепляем это уравнение по степеням y''. Коэффициент при первой степени дает уравнение

$$f\Phi_y+\left(\Phi_x+\Phi_y y'\right)f_{y'}+\Phi f_y=0 ,$$

решая которое, находим:

$$y=\Phi\left(z\left(x\right)+\int\frac{\Phi_x}{\Phi^2}dy\right).$$

В определяющем уравнении переходим к новым переменным:

$$z=\frac{1}{\Phi}y'-\int\frac{\Phi_x}{\Phi^2}dy ,\ y=t ;$$

после преобразований получаем:

$$f\Phi_t+\Phi f_t=0 ,$$

откуда следует требуемое равенство: $f=C\Phi^{-1}$, C = const.

Теорема доказана.

Таким образом, можно сделать вывод, что любая точечная симметрия, удовлетворяющая условию $\xi=0$, может быть переведена в фундаментальную симметрию эквивалентного уравнения домножением исходного уравнения на множитель f. Назовем такой множитель **фундаментализирующим**.

Рассмотрим **пример**.

Пусть дано уравнение $y''=\frac{\left(y'\right)^2}{y}+xy'$ с допускаемым оператором $X=y\partial_y$.

Таким образом, мы имеем $H=y''-y^{-1}\left(y'\right)^2-xy'$; это уравнение обладает точечной симметрией с порождающей функцией $\Phi=y$. По теореме 2 получаем, что фундаментализирующий множитель $f=Cy^{-1}$, $C=\text{const}$. Проверим, что это действительно так.

После домножения на фундаментализирующий множитель определяющее уравнение приобретает следующий вид:

$$fy''+fy'\left(-2y^{-1}y'-x\right)+f_{y'}y'\left(y''-y^{-1}\left(y'\right)^2-xy'\right)+$$
$$+fy^{-1}\left(y'\right)^2+f_y y\left(y''-y^{-1}\left(y'\right)^2-xy'\right)=0.$$

Расщепляя это уравнение по степеням y'', получаем

$$f+yf_y+y'f_{y'}=0, \qquad (6)$$

откуда

$$\frac{dy'}{y'}=\frac{dy}{y},$$

следовательно, $y'=yz\left(x\right)$. Переходим к новым переменным: $z=\dfrac{y'}{y}$, $y=t$.

В новых переменных уравнение (6) приобретает следующий вид:

$$f+tf_t=0.$$

Отсюда получаем $f=Ct^{-1}$ или $f=Cy^{-1}$.

Приведем еще один **пример**.

Возьмем некоторое уравнение, имеющее точечную симметрию и превратим эту симметрию в фундаментальную. Найдем вторую фундаментальную симметрию, а затем найдем все остальные симметрии с помощью метода Лагранжа.

Возьмем уравнение

$$H=y''+y^{-1}\left(y'\right)^2-3xy=0,$$

имеющее точечную симметрию $\Phi=y\partial y$.

По теореме 4 можем превратить эту симметрию в фундаментальную, умножив уравнение H на множитель $f=Cy^{-1}$, где C = const. Действительно, тогда

$$\underset{2}{X}\,fH=y\left(y^{-2}y''-2y^{-3}\left(y'\right)^2\right)+y'\left(2y^{-2}y'\right)+y''y^{-1}=0,$$

т. е. симметрия является фундаментальной.

Найдем вторую симметрию:

$$\Phi_2=C_2\Phi_0\int\Phi_0^{-2}e^{-\int\frac{\partial H/\partial y'}{\partial H/\partial y''}dx}dx=C_2y\int y^{-2}\exp\left(-\int 2y^{-1}y'dx\right)dx=C_2y\int y^{-4}dx.$$

Весь класс симметрий находим с помощью метода Лагранжа, используя формулы для нахождения C_1 и C_2:

$$C_1 = -\int I\left(\frac{y'+y}{y^4\int y^{-4}dx} - y'\right)^{-1} dx,$$

$$C_2 = \int I\left(\frac{y'+y}{y^4} - y'\int y^{-4}dx\right)dx,$$

где

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\left(x, y, y', \ldots\right) D_x^k\left[y'' + \frac{\left(y'\right)^2}{y} - 3xy\right].$$

Обратимся вновь к уравнению (1). Как мы уже говорили, зная одну фундаментальную симметрию этого уравнения, без труда можно найти вторую, которая будет иметь следующий вид:

$$\Phi_2 = \Phi_1\int \Phi_1^{-2} e^{-\int \frac{\partial H}{\partial y'}dx} dx.$$

Очевидно, эта вторая симметрия не всегда будет локальной, так как содержит выражение под знаком интеграла. Известно, что наличие в характеристике интеграла, не входящего под знак экспоненты, приводит к тому, что оператор, обладающий такой характеристикой, не имеет первого дифференциального инварианта.

Поэтому для уравнений второго порядка (1) такая симметрия оказывается «пустой», т. е. не упрощает уравнение (оно не может быть факторизовано). Хотелось бы добиться, чтобы вторая фундаментальная симметрия могла быть приведена к экспоненциальной форме — если фундаментальная симметрия имеет экспоненциальный вид

$$\Psi = \eta\left(x, y\right)\exp\left(\int \zeta\left(x, y, y'\right)dx\right),$$

то она обладает первым дифференциальным инвариантом, а следовательно, уравнение может быть факторизовано. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Для того чтобы вторая фундаментальная симметрия обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка могла быть приведена к экспоненциальной форме, необходимо, чтобы это уравнение имело следующий вид:

$$H = y'' - f\left(x, y\right)\left(y'\right)^2 - g\left(x, y\right)y' - h\left(x, y\right).$$

Доказательство. Для того чтобы вторая фундаментальная симметрия могла быть приведена к экспоненциальной форме, необходимо, чтобы подынтегральное выражение в формуле для Φ_2 было равно полной производной по x для некоторой функции Ψ:

$$\Phi_1^{-2} e^{-\int \frac{\partial H}{\partial y'}dx} = D_x\left[\Psi\right]. \tag{7}$$

Пусть Ψ представима в виде

$$\Psi = \Psi_0 e^{\int \frac{\partial H}{\partial y'} dx}.$$

Тогда подстановка этого выражения в равенство (7) дает уравнение для определения Ψ_0:

$$\Phi_1^{-2} = D_x\left[\Psi_0\right] - \Psi_0 \frac{\partial H}{\partial y'}.$$

Очевидно, что Ψ_0 может зависеть только от x и y. Исходя из предположения, что фундаментальные симметрии зависят только от тех же переменных, получаем

$$\Phi_1^{-2} = \Psi_{0_x} + y'\Psi_{0_y} - \Psi_0 \frac{\partial H}{\partial y'},$$

откуда

$$\Psi_{0_y} = \Psi_0 \frac{\partial^2 H}{\partial \left(y'\right)^2}$$

или

$$\frac{\Psi_{0_y}}{\Psi_0} = \frac{\partial^2 H}{\partial \left(y'\right)^2}.$$

Интегрируя это выражение, получаем, что $\dfrac{\partial^2 H}{\partial \left(y'\right)^2}$ может зависеть только от x и y. Следовательно, H должно иметь следующий вид:

$$H = y'' - f\left(x,y\right)\left(y'\right)^2 - g\left(x,y\right)y' - h\left(x,y\right).$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы получаем необходимое условие на вид уравнения второго порядка для того, чтобы данное уравнение допускало экспоненциальный нелокальный оператор в качестве фундаментальной симметрии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.

2. *Зайцев В. Ф., Ложкин А. С.* О разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Казань, 2004. Т. 24. С. 48–52.