И. А. Азизян

ЗНАЧЕНИЕ ЯЗЫКА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Работа представлена кафедрой математического анализа Рязанского государственного университета. Научный руководитель – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор А. Х. Назиев

В статье рассматривается значение языка при изучении теории вероятностей. Одно из основных понятий теории вероятностей – событие. Говорить о событиях, учитывая абстрактный характер, мы можем только при помощи языка.

Ключевые слова: *событие, случайное событие, пространство элементарных событий, абстрактные объекты, язык.*

I. Azizyan

ROLE OF LANGUAGE IN STUDYING THE PROBABILITY THEORY

The paper is devoted to the role of language in studying the probability theory. One of the main concepts of the probability theory is an event. We can speak about events only by means of language considering the abstract nature.

Key words: *event, accidental event, sample space, abstract objects, language.*

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. При этом изучаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы. Имея дело с абстрактными объектами, только при помощи языка мы можем решать поставленные задачи.

Пример 1. Бросаем игральную кость. Видим: кубик с нанесенными точками. На гранях нанесены точки количеством от одного до шести соответственно. Пусть кубик выпал гранью с нанесенной одной точкой. Мы видим объект – кубик, на верхней грани которого одна точка. Кубик – это не событие. То, что выпала грань с одной точкой – это событие. Событие рождается тогда, когда мы начинаем описывать этот объект. Мы описываем то, что видим: выпало одно очко, т. е. это событие: выпадение одного очка. Описывая один и тот же объект по-разному, мы получаем разные события. Рассматривая объект – кубик, на верхней грани которого одна точка, мы можем сказать, что выпало нечетное число очков. Это будет одно событие.

Событие – выпадение нечетного числа очков. Опишем объект по-другому: выпало минимальное число очков, значит, событие – выпадение минимального числа очков; выпало менее двух очков, тогда событие – выпадение менее двух очков.

Иногда рассматриваются на первый взгляд разные события, но на самом деле просто одно событие описывается по-разному. Бросаем игральную кость.

Событие – выпадение целого числа очков, заключенного в промежутке [0,5; 1,5].

Событие – выпадение числа очков, квадрат которых не превышает двух.

Рассмотрим теоретико-множественную интерпретацию события.

Пусть проводится некоторый опыт со случайным исходом.

Множество $\Omega = \{\omega\}$ всех возможных взаимоисключающих исходов данного опыта (испытания, эксперимента) называется пространством элементарных событий, а сами исходы ω – элементарными событиями (или «элементами», «точками»).

Случайным событием (или просто событием) называется любое подмножество множества Ω, если оно конечно или счетно.

В нашем примере множество всех возможных взаимоисключающих исходов $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

Целое число очков, заключенное в промежутке [0,5; 1,5], – это число 1. Таким образом, событие – выпадение целого числа очков, заключенного в промежутке [0,5; 1,5], является подмножеством множества $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. Запишем как $\{1\}$.

Квадрат какого числа не превышает двух? Только квадрат числа 1, так как $1^2 = 1$, а $2^2 = 4$ и т. д.

Событие – выпадение числа очков, квадрат которых не превышает двух, является подмножеством множества $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. т. е. $\{1\}$.

В обоих случаях мы рассматриваем $\{1\}$, т. е., если перейти на теоретико-множественную основу, получаем, что рассматриваем одно и то же событие, таким образом, мы можем говорить о тождественности рассматриваемых событий. Говорить о событиях, учитывая абстрактный характер, мы можем только при помощи языка.

Пример 2. Какова вероятность того, что при двукратном бросании монеты оба раза выпадет «Герб»?

Необходимо найти вероятность события. Какого? Событие – при двукратном бросании монеты оба раза выпадет «герб». Это событие мы не можем показать. Если даже покажем результат при первом бросании, то увидим монету со стороной «герб» или «решка». После второго бросания мы и вовсе результат первого бросания не сможем показать. Монета со стороной «герб» или «решка» – это не событие. Мы должны описать то, что видим: выпала монета стороной «герб»; выпала монета стороной «решка».

Перейдем к теоретико-множественной интерпретации события. Множество всех возможных взаимоисключающих исходов $\Omega = \{\{Г;Г\};\{Р;Р\};\{Г;Р\};\{Р;Г\}\}$. Понять, какие же могут произойти элементарные события, мы можем, лишь описывая их:

- при первом бросании выпал «герб» и при втором бросании выпал «герб»;
- при первом бросании выпала «решка» и при втором бросании выпала «решка»;
- при первом бросании выпал «герб», а при втором бросании выпала «решка»;
- при первом бросании выпала «решка», а при втором бросании выпал «герб».

Таким образом, имеются четыре исхода. Их можно описать только при помощи языка. Студенты часто допускают ошибку при рассмотрении типичных примеров, чаще рассматривают три исхода. Рассуждают следующим образом: первый исход – в двух случаях выпал «герб», второй исход – в двух случаях выпала «решка», третий исход – при одном бросании выпал «герб», при другом выпала «решка».

Событие – при двукратном бросании монеты оба раза выпадет «герб» является подмножеством множества $\Omega = \{\{Г;Г\};\{Р;Р\};\{Г;Р\};\{Р;Г\}\}$. Обозначим это событие через A, тогда $A = \{Г;Г\}$. Таким образом, вероятность того, что при двукратном бросании монеты оба раза выпадет «герб» равна $P(A) = \frac{1}{4}$.

Такие примеры способствуют правильному решению следующего задания. Найти ошибку в рассуждениях: какова вероятность, что подброшенные вверх две правильные монеты упадут на одну и ту же сторону?

Решение, предложенное Даламбером.

Опыт имеет три равновозможных исхода:

1) обе монеты упали на «орла»;

2) обе монеты упали на «решку»;

3) одна из монет упала на «орла», другая на «решку».

Из них благоприятными для нашего события будут 2 исхода, поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$.

Пример 3. В урне содержится 5 белых и 4 черных шара, различающихся только цве-

том. Вынимается наудачу один шар. Найти вероятность того, что он белый.

Вынимаем наудачу один шар.

Какие возможны исходы? Чтобы ответить на этот вопрос, можно перенумеровать мысленно шары и при помощи языка описать все возможные исходы опыта:

- вынимают первый белый шар – $Б_1$;
- вынимают второй белый шар – $Б_2$;
- вынимают третий белый шар – $Б_3$;
- вынимают четвертый белый шар – $Б_4$;
- вынимают пятый белый шар – $Б_5$;
- вынимают первый черный шар – $Ч_1$;
- вынимают второй черный шар – $Ч_2$;
- вынимают третий черный шар – $Ч_3$;
- вынимают четвертый черный шар – $Ч_4$.

То есть пространство элементарных событий можно записать в виде $\Omega = \{Б_1; Б_2; Б_3; Б_4; Б_5; Ч_1; Ч_2; Ч_3; Ч_4\}$. Обозначим через A событие – появление белого шара, тогда $A = \{Б_1; Б_2; Б_3; Б_4; Б_5\}$. Так как все элементарные исходы равновозможны, то по классическому определению вероятности $P(A) = \frac{5}{9}$.

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам, в частности задачи о подсчете числа комбинаций (выборок), получаемых из элементов заданного конечного множества. В каждой из них требуется подсчитать число возможных вариантов осуществления некоторого действия, ответить на вопрос: «Сколькими способами?»

Но показать эти способы мы не можем, мы можем их только описать при помощи языка.

Задание 1. Сколько пятизначных чисел можно составить, используя цифры 2, 5, 7, 8?

Надо подсчитать число всевозможных вариантов составления пятизначных чисел, т. е. ответить на вопрос: «Сколькими способами?»

Мы описываем, что все пятизначные числа, составленные из цифр 2, 5, 7, 8, могут отличаться друг от друга либо порядком их следования (например, 25558, 52855), либо самими цифрами (например, 52788 и 78888). Так как цифры могут повторяться, а их четыре, то первую цифру пятизначного числа мы можем выбрать четырьмя способами, вторую – тоже четырьмя способами, третью – четырьмя, пятую – четырьмя. Нами рассматривается множество элементов $\{2, 5, 7, 8\}$, необходимо подсчитать число комбинаций, получаемых из элементов заданного конечного множества.

По правилу умножения: если из некоторого конечного множества первый объект (элемент x) можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект (элемент y) можно выбрать n_2 способами, то оба объекта (x и y) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами. Этот принцип распространяется и на случай трех и более объектов.

Таким образом, первую, вторую, третью, четвертую, пятую цифру пятизначных чисел в указанном порядке можем выбрать $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ способами.

Этот же результат можно получить, используя правило нахождения числа размещений. *Размещением* из n элементов по m элементов $(0 < m \le n)$ называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее m элементов.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов.

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Нами рассматривается множество элементов $\{2, 5, 7, 8\}$. Размещением называется любое упорядоченное подмножество множества $\{2, 5, 7, 8\}$, содержащее 5 элементов, т. е. любое пятизначное число, составленное из цифр 2, 5, 7, 8.

Таким образом, искомое число пятизначных чисел равно числу размещений из четырех элементов по пять элементов $\overline{A}_4^5 = 4^5 = 1024$.

Объекты теории вероятностей – яркий пример абстракции. И только развитие абстрактного мышления и умения передачи информации при помощи языка способствует пониманию данной математической науки.