***Т. П. Пайсон***

# НАПРАВЛЕНИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИПА ПРЕЕМСТВЕННОСТИ МЕЖДУ ШКОЛОЙ И ВУЗОМ
## (на примере курса аналитической геометрии)

*Работа представлена кафедрой математического анализа*
*Барнаульского государственного педагогического университета.*
*Научный руководитель – доктор педагогических наук, доцент Э. К. Брейтигам*

*В статье представлены направления реализации принципа преемственности и упражнения для каждого направления из курса аналитической геометрии.*

***Ключевые слова:*** *принцип обучения, преемственность, упражнения, аналитическая геометрия.*

*T. Payson*

# WAYS OF IMPLEMENTING THE CONTINUITY PRINCIPLE BETWEEN SCHOOL AND UNIVERSITY (based on the analytic geometry course)

*The article demonstrates the ways of the continuity principle implementation and the exercises from analytic geometry for each of the ways.*

***Key words:*** *principle of teaching, continuity, exercise, analytic geometry.*

В работе [4, с. 135] были выявлены и теоретически обоснованы следующие пути реализации принципа преемственности:

1. Формирование учебной деятельности первокурсников, основанной на развитии теоретического мышления в процессе изучения математических дисциплин.
2. Интегративное развитие образного и абстрактно-логического мышления студентов.
3. Становление знаково-символьной деятельности студентов на основе формирования приемов работы с учебно-научной литературой по математике.

Цель данной статьи продемонстрировать практическое применение выделенных направлений при изучении курса «аналитическая геометрия». Следует отметить, что существуют традиционные задачи на развитие таких компонентов мышления, как анализ, содержательное планирование и рефлексия, но в этих задачах недостаточно выражена преемственность. Мы предполагаем, что рассмотренные ниже примеры и задачи должны включаться в вузовский процесс учебной деятельности на различных стадиях изучения предмета (особенно в течение первого семестра) для формирования устойчивых преемственных связей между школой и вузом, а также между различными предметами, изучаемыми на первом курсе математического факультета.

1. На наш взгляд, данное направление преемственности наиболее часто может применяться для реализации принципа преемственности при решении различных задач аналитической геометрии в отличие от других выделенных путей. Этому способствуют «интересные» формулировки задач, требующие для решения «перевести» условие задачи на математический язык и/или создать подходящий образ для выяснения необходимых отношений между объектами. Приведем задачи из раздела «Векторная алгебра», реализующие первое направление. Следует заметить, что для данного раздела характерен частный математический прием выражения искомых векторов через выбранный базис.

*Задача* 1.1 [3, с. 14, № 31]. Даны четыре вектора $\overline{a}=(1,2,3)$, $\overline{b}=(2,-2,1)$, $\overline{c}=(4,0,3)$, $\overline{d}=(16,10,18)$. Найти вектор, являющийся проекцией вектора $\overline{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, при направлении проектирования, параллельном вектору $\overline{c}$.

*Решение.* Анализ (вербальная форма задачи). Даны четыре вектора. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяют плоскость, т. е. они неколлинеарные и через них проведена плоскость. Видимо, векторы $\overline{d}$ и $\overline{c}$ не лежат в этой плоскости и, в свою очередь, неколлинеарные. Направление проектирования задает вектор $\overline{c}$, значит, следует рассматривать вектор $\lambda\overline{c}$. Тогда можно представить, что искомый вектор $\overline{d'}$ является проекцией вектора $\overline{d}$ на плоскость при направлении проектирования, параллельном вектору $\overline{c}$. В результате должны найти координаты вектора $\overline{d'}$. Изобразим условие задачи на рисунке, т. е. переведем его мысленно в образную, а затем в наглядную форму (рис. 1).

Планирование. Записать формализованное условие задачи, попробовать применить прием выражения искомого вектора через базисные. В данном случае вектор $\overline{d'}$ лежит на плоско-

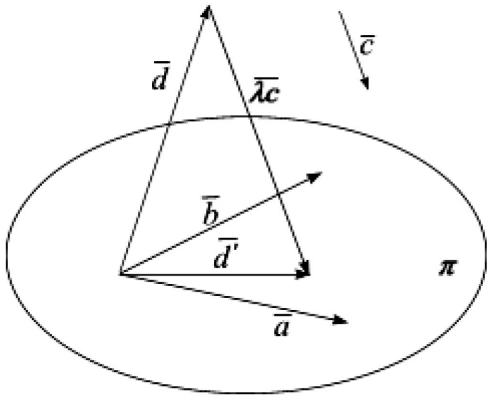


**Рис. 1. Графическая иллюстрация задачи 1.1**

сти с базисными векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, значит, $\overline{d'} = n \cdot \bar{a} + m \cdot \bar{b}$. Прием применили, но данных для решения задачи недостаточно. Мысленно выделяем треугольник векторов $\bar{d}$, $\overline{d'}$, $\lambda\bar{c}$ и видим, что они находятся в отношении правила сложения векторов, т. е. $\overline{d'} = \bar{d} + \lambda\bar{c}$, следовательно, $n \cdot \bar{a} + m \cdot \bar{b} = \bar{d} + \lambda\bar{c}$. Таким образом, получена система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными $n$, $m$, $\lambda$, если расписать в координатах, откуда получаем ответ: $\overline{d'} = (-4,10,3)$.

Рефлексия. При решении задачи использовались три формы представления информации. Причем для составления алгебраической записи (символьной формы) нам потребовался рисунок – образная форма (увидеть треугольник, образующий правило сложения векторов), для составления рисунка – словесная форма (например, построение вектора $\lambda\bar{c}$). Рефлексия при решении данной задачи проявляется в вопросах студентов друг к другу для осознания ими своей деятельности. Вопросы могут быть следующими: насколько эффективно применили отрабатываемый прием, в каких ситуациях можно будет применить полученный результат задачи, какие новые отношения возникли в понятии «вектор» и т. д.

*Задача* 1.2 [3, с. 27, № 141]. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Представить вектор $\bar{b}$ в виде суммы двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ так, чтобы вектор $\bar{x}$ был коллинеарен вектору $\bar{a}$, а вектор $\bar{y}$ ортогонален вектору $\bar{a}$.

*Решение.* Анализ. Что означает фраза «Представить вектор $\bar{b}$ в виде суммы двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$»? Смысл в том, что требуется найти в ходе решения задачи два вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$, удовлетворяющие условиям. В какой форме должны быть найдены эти векторы? Векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ должны быть выражены через заданные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Создадим мысленный образ условия задачи, исходя из символьных (текст из сборника задач) или вербальных (произнесенных преподавателем или студентами) данных. С помощью параллельного переноса мысленно отложим от одной точки данные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (предположим, что они не лежат на одной прямой). Вектор $\bar{x}$ расположим на прямой, определяемой вектором $\bar{a}$ (так как по условию они коллинеарны, то такое изображение возможно) с началом в начале вектора $\bar{b}$ (для формирования условия сложения векторов). Вектор $\bar{y}$ ортогонален вектору $\bar{a}$, значит, перпендикулярен прямой, содержащей вектор $\bar{a}$, и должен быть направлен к концу вектора $\bar{b}$, чтобы выполнялось условие сложения векторов. Величина от начала вектора $\bar{b}$ до начала вектора $\bar{y}$ задает длину вектора $\bar{x}$.

Изобразим сложившийся образ (рис. 2). Заметим, что при построении рисунка для неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ однозначно определяются направления и длины искомых векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Если же предположить, что данные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ являются коллинеарными, то искомый вектор $\bar{y}$ вырождается в нулевой вектор, а вектор $\bar{x}$ совпадает с вектором $\bar{b}$. Этот случай не представляет интереса, но является одним из решений данной задачи. (Следует заметить, что данная ситуация упущена в ответах сборника задач [3].)

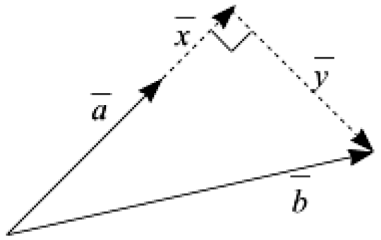


**Рис. 2. Графическая иллюстрация задачи 1.2**

Планирование. Аналогично задаче 1.1 требуется составить формализованное условие и попытаться применить указанный математический прием. Вектор $\bar{b}$ представляется в виде суммы векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$: $\bar{b} = \bar{x} + \bar{y}$. Вектор $\bar{x}$ коллинеарен вектору $\bar{a}$: $\bar{x} = \lambda\bar{a}$. Вектор $\bar{y}$ ортогонален вектору $\bar{a}$: $(\bar{y}, \bar{a}) = 0$. Цель: выразить векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ через базисные $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в предположении, что последние неколлинеарны. Если найдем действительное число $\lambda$, то сможем выразить $\bar{x}$ из второго условия и $\bar{y} = \bar{b} - \lambda\bar{a}$ из первого условия. Подставим $\bar{y} = \bar{b} - \lambda\bar{a}$ в третье условие задачи: $(\bar{y}, \bar{a}) = (\bar{b} - \lambda\bar{a}, \bar{a}) = = (\bar{b}, \bar{a}) - \lambda(\bar{a}, \bar{a}) = 0$. Следовательно, $\lambda = \dfrac{(\bar{b}, \bar{a})}{(\bar{a}, \bar{a})}$. Ответ: $\bar{x} = \dfrac{(\bar{b}, \bar{a})}{(\bar{a}, \bar{a})} \cdot \bar{a}$, $\bar{y} = \dfrac{\bar{b}(\bar{a}, \bar{a}) - \bar{a}(\bar{b}, \bar{a})}{(\bar{a}, \bar{a})}$.

Рефлексия. Что нового было в данной задаче и в чем можно увидеть преемственность? Ранее при решении задач, использующих систему линейных уравнений, у искомых векторов находились координаты, а в данном случае получилось выражение в общем случае. Преемственность заключается в развитии обобщенных учебных действий (анализ, планирование, рефлексия) и рассмотрении задачи в различных формах представления информации для осмысления выполняемых действий, и в частности для осознания наличия вырожденного случая и единственного ненулевого решения.

2. Наиболее благоприятные условия для реализации принципа преемственности во втором направлении создают лекции по аналитической геометрии и фрагменты практических занятий, на которых подробно разбираются теоретические основы курса, выявляются преемственные связи между различными темами и разделами, а также уточняются межпредметные связи. На наш взгляд, работа над реализацией второго пути требует от преподавателя больших усилий, чем при работе над другими направлениями, но позволяет сделать курс интересным, подчеркнуть значимость изучаемого материала и тем самым улучшить усвоение первокурсниками-математиками материала одной из базовых дисциплин. Приведем пример, предполагающий создание образа понятия.

*Пример* 2.1. Понятие гиперболического параболоида.

При формировании понятия поверхности, довольно непростой для восприятия, такой как гиперболический параболоид, очень важно иметь возможность опираться на чувственный опыт студентов. Большая часть геометрических образов поверхностей у студентов связана с окружающими их предметами, например со зданиями (стены или крыши которых представляют собой фрагменты плоскости, сферы, эллипсоида, цилиндрической поверхности). С изображением сферы, конуса, цилиндра студенты знакомились в школе. Весь этот наглядный, графический и знаково-символьный материал является основанием для формирования понятия гиперболического параболоида. Наблюдать же тела, ограниченные данной поверхностью, им, вероятнее всего, не приходилось (если не считать «упрощенного» варианта – седла). Такие геометрические образы должны быть созданы с помощью материальных моделей и изображений. При введении понятия целесообразно показать слайды с изображением архитектурных сооружений, таких как здание «Лос Манантиалес» в г. Хошимилько, Мексика (арх. Ф. Кандела, 1958 г.) (рис. 3) или павильон фирмы Philips на Всемирной выставке в Брюсселе (арх. Ле Корбюзье, 1958 г.), стены которых состоят из фрагментов гиперболических параболоидов. Слайды должны быть яркими,

**Рис. 3. «Лос Манантиалес» в г. Хошимилько, Мексика**

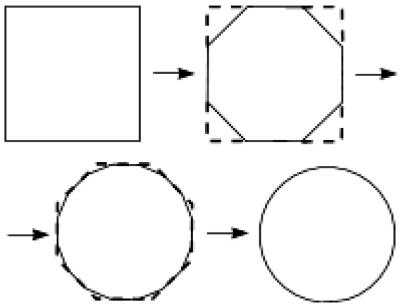

**Рис. 4. Графическая иллюстрация задачи 2.1**

так как первоначальное восприятие оставляет самый запоминающийся образ в сознании студента. Далее «включается» абстрактно-логическое мышление, которое позволяет представить формальное описание гиперболического параболоида.

Обозначим реализацию второго выделенного пути в задачах межпредметного характера.

*Задача* 2.1. (Применяется при решении задач аналитической геометрии после изучения темы «Сходимость числовых рядов» курса математического анализа.) Дан квадрат со стороной 1. Каждую из его сторон разделяют на три равные части и соединяют ближайшие точки смежных сторон. Полученные треугольники отрезают. Так же поступают с оставшимся восьмиугольником, затем – с шестнадцатиугольником и так до бесконечности. Требуется найти площадь фигуры, которая образуется в результате бесконечного процесса.

*Решение.* Анализ. Представим указанный в условии задачи процесс и изобразим несколько его этапов (рис. 4).

На третьем шаге мы изобразили 32-угольник, по своему виду он напоминает окружность. Исходя из геометрического образа, можно предположить, что в результате бесконечного процесса площадь фигуры будет равна площади круга, вписанного в квадрат. В таком случае площадь будет равна $S = \pi R^2 = \frac{\pi}{4}$.

Планирование. Удобно вычислять площадь оставшейся фигуры путем вычитания площади «отрезанных» треугольников. Для этого требуется вывести формулу площади «отрезаемых» треугольников на $n$-м шаге и найти сумму ряда, членами которого и являются указанные площади.

Сумма площадей треугольников, «отрезаемых» на первом шаге: $s_1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$. Формула для вычисления суммы площадей треугольников, «отрезаемых» на $n$-м шаге: $s_n = s_{n-1} \cdot \frac{2}{9}$ для $n > 1$ и $\{s_n\}$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Тогда сумма площадей отрезаемых треугольников при $n \to \infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n$. Этот ряд сходится, и его сумма равна: $S_\Delta = \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{2}{7}$. Тогда искомая площадь фигуры $S = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

Рефлексия. Ответ задачи не совпал с нашим предположением о площади круга. Причиной выдвижения данной гипотезы оказался геометрический образ. Однако же именно он позволил составить внутренний план действий и свести решение к нахождению суммы ряда. Данная задача демонстрирует нам возможную ситуацию, в которой требуется интеграция образного и абстрактно-логического мышлений, тогда как использование только

одного из них либо может привести к неверному результату, либо решение не будет найдено.

Заметим, что включение в курс аналитической геометрии задач, использующих аппарат из параллельных курсов, позволяет мышлению студента выходить за пределы привычной учебной ситуации и целостно использовать полученные знания в вузе.

*Задача* 2.2. Два стержня вращаются вокруг двух неподвижных точек, расстояние между которыми равно $2a$. При этом вращении стержни остаются все время перпендикулярными друг к другу. Какую траекторию начертит место пересечения стержней при вращении?

Сложность (необычность) задачи 2.2 заключается в составлении адекватного математического образа. Дальнейшее решение основывается на применении приема составления уравнений. В процессе анализа можно обратить внимание на устоявшийся «школьный» образ: прямые углы опираются на диаметр. Ответ: окружность с центром в середине отрезка $AB$ и радиусом $a$ (рис. 5).

*Задача* 2.3 [5, с. 47, № 166]. Шарик скатывается по желобку и, приобретя скорость $v$, срывается с него в той точке, где касательная имеет горизонтальное направление. Определите дальнейшую траекторию шарика, пренебрегая сопротивлением воздуха.

*Решение*. Анализ. Условие задачи предполагает знания, приобретаемые в школьном курсе физики. Вспоминаем: по закону инерции шарик должен продолжать движение по направлению касательной с постоянной скоростью $v$. Следовательно, по истечении $t$ секунд он должен быть на $vt$ метров правее точки срыва. Но, кроме того, на шарик действует сила тяжести, которая заставляет его опускаться в вертикальном направлении с постоянным ускорением $g = 9{,}8$ м/с$^2$, т. е. через $t$ секунд он должен находиться на $\frac{gt^2}{2}$ м ниже, чем в момент отрыва. Для изображения условия задачи на рисунке перейдем к этапу составления внутреннего плана действий.

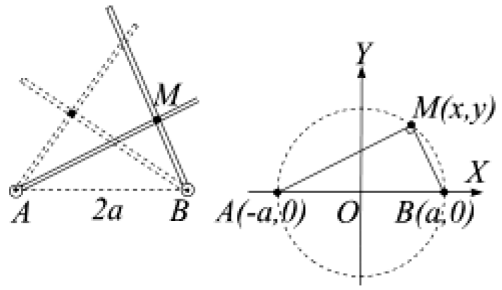


**Рис. 5. Графическая иллюстрация задачи 2.2**

Планирование. Во-первых, введем подходящую для данной ситуации систему координат (рис. 6), а именно, чтобы траектория полета шарика описывалась положительными координатами точек кривой. Для этого ось $OX$ направим вниз, а ось $OY$ – вправо (при этом сохранится положительная ориентация плоскости). Далее составим параметрические уравнения искомой кривой, используя интуитивно введенный на этапе анализа параметр $t$. Применим прием составления явного уравнения по известным параметрическим (исключим параметр $t$). Имеем: $\begin{cases} x = \frac{gt^2}{2}, \\ y = vt; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = \frac{2x}{g}, \\ y^2 = \frac{2v^2}{g}x \end{cases}$. Получили дугу параболы с началом в точке отрыва и ветвями, направленными вдоль оси $OX$.

Рефлексия. При решении данной задачи мы сталкиваемся как с ретроспективной преемственностью, направленной на актуализа-

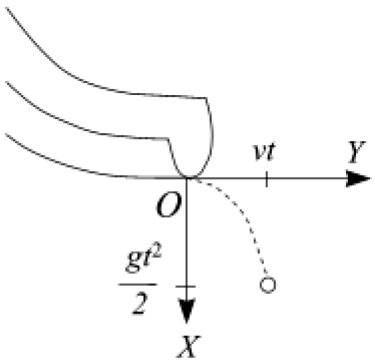


**Рис. 6. Графическая иллюстрация задачи 2.3**

цию знаний, полученных в школьном курсе, так и с межпредметной – в задаче по аналитической геометрии используются сведения из курса общей физики.

3. Подробно этапы третьего пути описаны в [4, с. 135–136]. В данной статье приведем только примеры заданий, ориентированных на развитие умений читать математические тексты.

В силу реализации принципа преемственности большинство приемов чтения ненаучных источников информации (художественные, познавательные, адаптированные учебные тексты и т. д.) переносятся на работу с учебно-научной литературой. Для актуализации этих приемов можно применять следующие упражнения:

*Упражнение* 3.1. Резюмируйте прочитанный фрагмент в словесной форме, письменной и графической.

*Упражнение* 3.2. Выделите центральную идею основного результата работы, а также опорные точки в доказательстве теоремы (утверждения).

Заметим, что если при решении такого типа упражнений студент столкнулся со знаковым материалом, овеществленным в виде формул, графиков, картинок-иллюстраций, даже сопровождаемых словесными интерпретациями, то он, разумеется, не сразу начинает вникать в содержание фрагмента или решать задачу. На данном этапе активно работает зрение и зрительное восприятие. Если студенту предложить материал неизвестного ему содержания и непривычного оформления (формулы, содержащие незнакомые символы, изображение фрагмента не используемой ранее поверхности и т. д.), то он его не воспримет адекватным образом. Поэтому использовать упражнения 3.1 и 3.2 целесообразно на знакомых по смыслу текстах.

Трудность понимания текста зависит не только от «знакомости» текста, но и от того, какую вероятность имеют его фрагменты [4, с. 302]. Вероятностные связи смысловых единиц текста могут значительно различаться: в одних случаях достаточно только начать фразу, чтобы ее окончание можно было однозначно предсказать (вероятность соединения слов в этих случаях приближается к единице); в других случаях начало фразы не определяет с полной однозначностью ее конца и оставляет возможность ряда альтернатив, из которых читатель должен выбрать наиболее адекватную. Устные упражнения типа «закончите фразу» эффективны для актуализации знаний, полученных на лекции, и могут применяться как в конце, так и в начале занятий, а также для составления математических диктантов.

*Упражнение* 3.3. Закончите фразу: «Векторы $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$,… $\overline{A_nB_n}$, коллинеарны тогда и только тогда, когда…» [1, с. 44]. Завершение фразы может предполагать по меньшей мере два возможных варианта: «…их координаты пропорциональны» и «…несущие их прямые параллельны». В данном случае при прочтении фразы включается активный анализ и выбор наиболее предпочтительного варианта.

Большинство научных математических текстов характеризуются однозначным пониманием. Специально организованного скрытого подтекста в них обычно нет. Все элементы представлены именно в том смысловом качестве, в каком они должны быть поняты читателем. Но бывают и исключения – это работы, в которых за научным изложением материала скрывается цель автора, например, приобщить читателя к красоте математики (в таком случае результаты приведены в «красивом», например симметричном или лаконичном, виде или выражены через конечное заранее определенное число объектов), или приоритетной целью учебного пособия является развитие теоретического мышления студента. Кроме того, подтекст может быть сформирован у читателя в зависимости от его наличного опыта.

Упражнения на выявление подтекста уместно использовать на этапе рефлексии при решении задач. Вопрос может быть сформулирован следующим образом: для чего, на ваш взгляд, мы решили данную задачу?

Каждое математическое предложение, фраза в доказательстве теоремы или вывод

в конце параграфа должны соотноситься со всем прочитанным до этого момента текстом (научной статьи, вузовского учебника или конспекта лекции), должны быть установлены причинно-следственные связи.

*Упражнение* 3.4. Перефразируйте текст: «Каждое из двух полупространств, на которое пространство разбито плоскостью $Oxy$, двумя другими координатными плоскостями разбивается на четыре области, соответствующие четырем квадрантам, на которые плоскость $Oxy$ разбивается осями $Ox$ и $Oy$. Всего таким образом получаем 8 областей, называемых октантами, на которые пространство разбивается совокупностью трех координатных плоскостей» [1, с. 60].

С первого раза текст является трудным для восприятия, но внимательное изучение структуры фразы приводит к более простому изложению, например следующему. Пространство разбивается плоскостью $Oxy$ на два полупространства, каждое полупространство разбивается координатными плоскостями $Oxz$ и $Oyz$ на четыре области; плоскость $Oxy$ разбивается осями $Ox$ и $Oy$ на четыре квадранта, этим квадрантам соответствуют указанные области; учитывая, что полупространств было два, получаем восемь октантов.

Таким образом, в данной статье мы рассмотрели упражнения, при помощи которых возможно и целесообразно реализовывать принцип преемственности по трем ранее сформулированным направлениям.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров П. С.* Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968. 912 с.
2. *Лурия А. Р.* Язык и сознание / Под ред. Е. Д. Хомской. Ростов н/Д: Феникс, 1998. 416 с.
3. *Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976. 384 с.
4. *Пайсон Т. П.* Преемственность в организации учебной деятельности студентов при изучении математических дисциплин на первом курсе классического университета (математический факультет) // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена: Аспирантские тетради. Ч. II: Педагогика и психология, теория и методика обучения. 2008. № 32 (70). С. 132–137.
5. *Цубербиллер О. Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1955. 356 с.