А. В. Колдунов

МАЛЫЕ (*E,I*)-АБСОЛЮТЫ И ИХ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ

В статье введена конструкция d(E,I) для построения прообразов специального вида компакта. Малыми (E,I)-абсолютами названы хаусдорфовы d(E,I). Некоторые известные типы абсолютов являются частными случаями малых (E,I)-абсолютов. Получены характеризации пространств d(E,I).

Ключевые слова: абсолюты компактных пространств; *I*-ультрафильтры; свойство Хаусдорфа; замыкающие отображения.

A. Koldunov

SMALL (*E,I*)-ABSOLUTES AND THEIR CHARACTERIZATIONS

A procedure for obtaining preimages d(E,I) of a compact space have been introduced. The Hausdorff spaces d(E,I) are called small (E,I)-absolutes. Some known types of absolutes are particular cases of small (E,I)-absolutes. The characterizations of spaces d(E,I) have been jbtained.

Keywords: absolutes of compact spaces; *I*-ultrafilters; Hausdorff property; closing mappings.

Применение порядковых конструкций к архимедовой векторной решётке $C(H)$ всех непрерывных функций на компакте H приводит к построению непрерывных прообразов H специального вида. Действительно, порядковое пополнение исходной векторной решётки $C(H)$ обычно представляет собой снова векторную решётку вида $C(K)$ на некотором компакте K; тогда каноническое вложение $C(H)$ в $C(K)$ задаёт непрерывное и сюръективное отображение из K на H. Например, абсолют Глисона—Пономарёва порождён конструкцией дедекиндова пополнения (см. работу [5] и обзор [8]). Аналогично секвенциальный абсолют компакта связан с канторовским пополнением архимедовой векторной решётки (см. работы [1], [7]), а счётно-дедекиндово пополнение является основанием для введения σ-абсолюта компакта ([6], [4]). Заметим, что не все классические объекты функционального анализа описываются в терминах перечисленных порядковых пополнений. Поэтому появились иные типы порядковых расширений (см., например, работы [2], [3]), которые, в свою очередь, породили новые абсолюты.

Анализ этих и других работ позволяет выделить два класса абсолютов, а именно те, которые являются образами абсолюта Глисона–Пономарёва, и те, которые строятся на основе более узких идеалов пренебрежимых замкнутых множеств (абсолют Глисона–Пономарёва строится, по существу, по идеалу пренебрежимых замкнутых множеств, состоящему из всех замкнутых нигде не плотных множеств). Настоящая работа посвящена именно первому классу абсолютов, которые здесь названы малыми (*E,I*)-абсолютами.

Теперь введём некоторые обозначения, которые в дальнейшем будут использоваться без пояснений. Все топологические предполагаются компактами, а отображения — непрерывными и сюръективными. Впрочем, естественные уточнения позволяют использовать основную часть рассуждений для вполне регулярных пространств.

Буква *H* всегда будет обозначать исходный компакт, для которого строится малый (*E,I*)-абсолют. Замкнутые множества будут обозначаться буквами *F, K, P*, а открытые — буквами *G, W*.

Полагаем, что *E*(*H*) является решёткой всех замкнутых множеств в компакте *H*. Через *E* будет обозначаться произвольная подрешётка *E*(*H*), разделяющая компакт *H* в следующем смысле: если $t \in G \subset H$, то существует $F \in H$, для которого $t \in int\, F \subset F \subset G$. Заметим, что в качестве *E* можно, например, взять решётку $Z(H) = \{ f^{-1}(0) : f \in C(H)\}$ всех нуль-множеств в *H*.

Далее, считаем, что *I* является некоторым идеалом в решётке *E*, причём должны быть выполнены следующие два условия: а) любой элемент $P \in I$ нигде не плотен; б) если $F \in E \setminus I$ и $P \in I$, то найдётся $F_1 \in E \setminus I$, для которого $F_1 \subset F \setminus P$. Если F_1, F_2 принадлежат *E* и их пересечение принадлежит *P*, то будем говорить, что F_1 и F_2 *I*-дизъюнктны в *E*. Идеал *I* играет роль идеала пренебрежимых множеств во всех дальнейших построениях. Например, частным случаем идеала *I* может быть идеал $\Theta(H)$ нигде не плотных нуль-множеств или идеал *I*(*H*) всех замкнутых нигде не плотных множеств.

1. Пространство *d*(*E,I*)

Семейство $A \subset E$ будем называть *I*-фильтром в *E*, если *A* является фильтром множеств в *E* и не содержит элементов из *I*. *I*-фильтр *A* будем называть *I*-ультрафильтром, если *A* не содержится ни в каком другом *I*-фильтре.

Обозначим через *d*(*E,I*) семейство всех *I*-ультрафильтров в *E*. Для $F \in E$ обозначим $< F > = (A \in d(E,I) : F \in A)$. Введём в *d*(*E,I*) топологию, взяв в качестве базы замкнутых множеств всевозможные множества вида $<F>$, где $F \in E$. В этом случае пространство *d*(*E,I*) превращается в компактное T_1-пространство, которое не обязано быть хаусдорфовым. Следующий пример доказывает это.

Пример. Пусть *T* — дискретное несчётное множество. Рассмотрим компактификацию *βT* пространства *T* по Стоун—Чеху. Рассмотрим дальний нарост $Q = \beta T - U[\, cl\, U(t_n : t_n \in T)]$. Пусть компакт D_1 получается из *βT* отождествлением *Q* в точку $q \in D_2$. Пусть $D_2 = \cup\left(\frac{(-1)^n}{n} : n \in N \right) \cup \{0\} \subset [-1;1]$. Компакт *B* получается из прямой суммы D_1 и D_2 отождествлением точек *q* и $\{0\}$ в точку

$P \in B$. Заметим, что если $g \in C(B)$, то g отлична от $g(p)$ только на счётном числе дискретных точек из B. Пусть решётка E порождена замкнутыми множествами вида $\left\{cl(B \setminus g^{-1}(0)) : g \in C(B)\right\}$. Тогда множество $F_1 = \bigcup\left(\dfrac{-1}{n}, n = 2k+1\right) \bigcup \{p\}$, $F_2 = \bigcup\left(\dfrac{1}{n}, n = 2k\right) \bigcup \{p\}$ является I_0-дизъюнктным в E (где I_0 состоит из всех замкнутых нигде не плотных множеств в E). Тогда $< F_1 > \cap < F_2 >= \varnothing$. Если предположить, что $d(E,I_0)$ — хаусдорфовое пространство, то существуют непересекающиеся окрестности W_1, W_2 этих множеств. Поэтому найдутся $K_1, K_2 \in E$, для которых $< K_i > \cap < F_i >= \varnothing$ и $< K_i > \supset d(E,I) \setminus W_i \, (i = 1; 2)$. Тогда $K_1 \cup K_2 = B$, $F_i \cap K_i \in I_0$, $K_i \supset F_j \, (i, j = 1; 2; i \neq j)$. Поэтому можно считать, что $p \in K_1$. Из построения точки $p \in B$ следует, что $p \in int\, K_1$, и поэтому K_1 содержит дискретную точку из F_1. Это противоречит $< K_1 > \bigcap < F_1 >= \varnothing$.

Предложение 1. 1) Пусть $A \in d(E,I)$. Тогда множество $d(A) = \cap(F : F \in A)$ состоит из одной точки. 2) Отображение $\alpha : A \to \alpha(A)$ является непрерывным, сюръективным и неприводимым отображением из $d(E,I)$ на H. 3) Если $P \in I$, то $int\,\alpha^{-1}(P)$ — пустое. 4) Пусть $P \in E$, тогда $cl\,\text{int}\left(\alpha^{-1}(F)\right) \subset < F > \subset cl\left(\alpha^{-1}(F \setminus P)\right)$ для любого $P \in I$.

Доказательство. 1) Если $t_1, t_2 \in \alpha(A)$, то найдём $F_1, F_2 \in E$ со свойствами: $t_i \notin F_i$ (I = 1,2) и объединение F_1 и F_2 даёт H. Если $F_1 \in A$, то $t_1 \notin \alpha(A)$. Если $F_1 \notin A$, то $F_2 \subset A$ и $t_2 \notin \alpha(A)$. Таким образом получили противоречие.

2) Проверим, что отображение $\alpha : d(E,I) \to H$ — непрерывное. Пусть $\alpha(A) \in G \subset H$. Найдём $F_1, F_2 \in E$ со свойствами: $\alpha(t) \in \text{int}F_1 \subset F_1 \subset G$, $H \setminus \text{int}\,F_1 \subset \text{int}F_2$ и $\alpha(t) \notin F_2$. В этом случае $A \in W = d(E,I) \setminus < F_1 >$ и $d(t) \subset F_1 \subset G$.

Докажем, что α — сюрьективное. Пусть $t \in H$. Существует $A \in d(E,I)$, содержащее все $F \in E$ с условием: $t \in \text{int}F$. Тогда $\alpha(A) = t$.

Остаётся проверить, что α — неприводимое, то есть если $K \subset d(E,I)$ и отлично от $d(E,I)$, то $\alpha(K) \neq H$. Поскольку $K \neq d(E,I)$, то существуют I-дизъюнктные $F_1, F_2 \in E$, для которых $K \subset < F_1 >$, $F_2 \notin I$. Поскольку $F_1 \cap F_2 \in I$, то $\varnothing \neq F_2 \setminus F_1 \subset H \setminus \alpha(K)$.

3) Следует из неприводимости α. Наконец, докажем утверждение 4 из формулировки предложения 1. Сначала установим левое включение. В противном случае существует $A \in \text{int}\alpha^{-1}(F) \setminus < F >$. Найдём $F_1 \in A$, которое I-дизъюнктно с $F \in H$. Всегда можно считать, что $F_1 \subset F$. Но тогда $\varnothing \neq < F_1 > \equiv < F_1 > \cap < F_2 > = \varnothing$.

Теперь докажем правое включение. Предположим противное и найдём $A \in < F > \setminus cl\,\alpha^{-1}(F \setminus P)$. Выбираем $F_1 \in A$, для которого $F_1 \subset F$ и

$< F_1 > \cap cl\,\alpha^{-1}(F \setminus P) = \varnothing$. По условию «б» идеала I найдём $F_2 \in E \setminus I$ со свойством $F_2 \subset F_2 \setminus P$. Тогда $\varnothing \neq < F_2 > \subset < F_1 > \cap cl\,\alpha^{-1}(F \setminus P) = \varnothing$. Получили противоречие.

Следующие результаты показывают, что в случае хаусдорфового пространства $d(E,I)$ канонического отображение $\alpha : d(E,I) \to H$ обладает рядом дополнительных свойств.

Предложение 2. Пусть $d(E,I)$ — хаусдорфовое пространство. 1) Пусть $F \in E$; тогда $< F > = \cap(cl\,\alpha^{-1}(F \setminus P) : P \in I)$. 2) Если замкнутое $K \subset \operatorname{int} < F >$, то существует $P \in I$, для которого $\alpha(K) \setminus P$ содержится в $\operatorname{int}(F)$.

Доказательство. 1) По пункту 4 предложения 1 достаточно проверить, что если $A \notin < F >$, то найдётся $P \in I$ с условием: $A \notin cl(\alpha^{-1}(F \setminus P))$. По хаусдорфовости $d(E,I)$, найдётся $F_1 \in A$, который I-дизъюнктен с F и $A \in \operatorname{int}[F_1]$. Это означает, что $P = F \cap F_1 \in I$. Покажем, что это означает, что $P \in I$ искомый. Если бы $A \in cl(\alpha^{-1}(F \setminus P))$, то $\alpha^{-1}(F \setminus P) \cap [F_1] \neq \varnothing$. Это противоречит $(F \setminus P) \cap F_1 = \varnothing$.

2) Сначала найдём $F_1 \in E$, для которого $< F_1 > \cap K = \varnothing$ и $< F_1 > \supset cl(E,I) \setminus \operatorname{int} < F >$. Тогда $F \cup F_1 = H$. Далее найдём $F_2 \in E$ со свойствами: $K \subset \operatorname{int} < F_2 >$, $F_2 \subset F$, $P = F_1 \cap F_2 \in I$. Это даёт $\alpha(K) \subset F_2$ и $\alpha(K) \setminus P \subset F_2 \setminus F_1 \subset F \setminus F_2$. Поэтому $\alpha(K) \setminus P \subset \operatorname{int} F$.

Т е о р е м а 1. Пусть $d(E,I)$ — хаусдорфовое пространство. Тогда для канонического отображения $\alpha : d(E,I) \to H$ имеют место следующие условия:

1) если $F_1, F_2 \in E$ I-дизъюнктны, то существует $P \in I$, для которого $cl(\alpha^{-1}(F_1 \setminus P)) \cap cl(\alpha^{-1}(F_2 \setminus P)) = \varnothing$;

2) пусть W_1 и W_2 — непересекающиеся окрестности элементов $A_1, A_2 \in d(E,I)$; тогда существуют I-дизъюнктные $F_1, F_2 \in I$ и $P \in I$, такие что $A_i \in \operatorname{int} cl(\alpha^{-1}(F_i \setminus P)) \subset cl\,\alpha^{-1}(F_i \setminus P) \subset W_i$ $(i = 1;2)$;

3) если $P \in I$, то $int(\alpha^{-1}(P)) = \varnothing$.

Доказательство: 1) Имеем $< F_1 > \cap < F_2 > = \varnothing$. По пункту 1 предложения 2 существует $P \in I$, для которого $cl(\alpha^{-1}(F_1 \setminus P)) \cap cl(\alpha^{-1}(F_2 \setminus P)) = \varnothing$.

2) Найдём I-дизъюнктные $F_1, F_2 \in E$, для которых $A_i \in \operatorname{int} < F_i > \subset < F_i > \subset W_i (i = 1,2)$. По пункту 1 предложения 2 находим требуемое $P \in I$.

3) По предложению 1 отображение α — неприводимое. Поэтому условие 3 из формулировки теоремы 1 выполнено.

В дальнейшем будем использовать следующие термины. Если пространство $d(E,I)$ — хаусдорфово, то пару $(d(E,I),\alpha)$ будем называть малым (E,I)-абсолютом исходного компакта H с каноническим отображением $\alpha : d(E,I) \to H$. Если для некоторого отображения $\beta : K \to H$ выполнено условие 1 из теоремы 1, то будем писать $\beta \in 1)$. Аналогичным образом введём обозначения $\beta \in 2)$ и $\beta \in 3)$.

Т е о р е м а 2. Малый (E,I)-абсолют $d(E,I)$ является жёстким в следующем смысле: пусть $\gamma : d(E,I) \to d(E,I)$, причём $\alpha\gamma = \alpha$; тогда γ является тождественным.

Доказательство. Предположим противное и найдём $A \in d(E,I)$, для которого $\gamma(A) \neq A$. Пусть $A \in W_1$, $\gamma(A) \in W_2$ и $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. По теореме 1 имеем $\alpha \in 2)$. Найдём I-дизъюнктные $F_1, F_2 \in E$ и $P \in I$ с соответствующими свойствами. Всегда можно считать, что $F_1 \cap F_2 \subset P$. Тогда $A \in \operatorname{int}(\alpha^{-1}(F_1)) \cap \gamma^{-1}(\operatorname{int}\alpha^{-1}(F_2)) = G$. Поскольку $\alpha \in 3)$, то найдётся $A_1 \in G \setminus \alpha^{-1}(P)$. Получаем, $\alpha(A_1) \in (F_1 \setminus P) \cap (F_2 \setminus P) = \varnothing$. Противоречие доказывает, что $\gamma(A) = A$.

2. Условия хаусдорфовости ($d(E,I)$,α)

Именно для малых (E,I)-абсолютов будут получены основные характеризации. В этом пункте будут указаны условия, при которых $d(E,I)$ является хаусдорфовым.

Предложение 3. Для того чтобы $d(E,I)$ было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых I-дизъюнктных $F_1, F_2 \in E$ нашлись $K_1, K_2 \in E$, такие что $K_1 \cup K_2 = H$ и $F_i \cap P_i \in I$ (где i = 1; 2). 2) Пусть выполнено следующее условие: если $F \in E$, то существует $F_1 \in E$, для которого $F \cup F_1 = H$ и F,F_1 I-дизъюнктны. Тогда $d(E,I)$ — хаусдорфовое.

Доказательство. 1) Необходимость, по существу, была установлена в примере 1. Докажем достаточность. Пусть $A_1, A_2 \in d(E,I)$. Выберем I-дизъюнктные $F_i \in A_i\,(i = 1; 2)$. Для них найдём $K_1, K_2 \in E$ из условия. Тогда $A_i \in < F_i > \subset W_i = d(E,i) \setminus < K_i >$ и $W_1 \cap W_2 = \varnothing$.

2) Проверим выполнение условия из предложения 3. 1) Пусть $F_1, F_2 \in E$ I-дизъюнктные. Для F_1 возьмём F_3 из формулировки. Тогда $F_1 \cup F_3 = H$, $F_1 \cap F_3 \in I$ и $F_2 \cap F_1 \in I$, что и требовалось.

Т е о р е м а 3. 1) Пусть выполнено следующее условие: для $P_1 \in I$ найдётся $P_2 \in I$, такое что $P_1 \subset P_2$ и $H \setminus P_2$ является нормальным топологическим пространством. Тогда $E(H)$ d($E(H)$,I) — хаусдорфовое. 2) Пусть выполнены следующие два условия: i) если, $P \in I$, то существует $h \in C(H)$, для которого $P \subset h^{-1}(0) \in I$; ii) если замкнутое $K = \cup(F_n \in E : n \in N)$, то $K \in E$. В этом случае d(E(I) — хаусдорфовое. 3) Пространство $d(Z(H),\Theta(H))$ является хаусдорфовым.

Доказательство. 1) Пусть $F_1, F_2 \in E(H)$ I-дизъюнктны. По $P_1 = F_1 \cap F_2 \in I$ найдём $P_2 \in I$ из условия. Тогда $F_1 \setminus P_2$, $F_2 \setminus P_2$ замкнутые и не пересекающиеся в нормальном $H \setminus P_2$. Поэтому существуют открытые $G_1, G_2 \subset H \setminus P_2$, для которых $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ и $G_i \supset F_i \setminus P_2\ (i = 1,2)$. Тогда G_1, G_2 открыты в H, и множества $K_i = H \setminus G_i\ (i = 1, 2)$ удовлетворяют условиям пункта 1 из предложения 3.

2) Пусть $F_1, F_2 \in E$ и $F_1 \cap F_2 \subset h^{-1}(0) \in I$. Для каждого $n \in N$ рассматриваем $M(i,n) = h^{-1}\left(\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) \cap F_i$ и находим $F(i,n) \in E$ из пункта 1 предложения 3, (где i = 1, 2). Полагаем $K_i = \cup F(i,n) \cup h^{-1}(0) \in E$. Тогда $K_1 \cup K_2 = H$ и $K_i \cap F_i \in I\ (i = 1, 2)$ и остаётся применить пункт 1 предложения 3. Заметим, что 3) следует из 2).

Замечание. Компакт $d(E(H),I(H))$, где $I(H)$ является решёткой всех замкнутых нигде не плотных множеств в H, совпадает с абсолютом Глисона–Пономарёва ([2]). Компакт $d(Z(H), \Theta(H))$, где $\Theta(H)$ является решёткой всех замкнутых нигде не плотных нуль-множеств, совпадает с секвенциальным абсолютом H ([2], [4]).

3. Построение замыкающего отображения

Результаты из этого пункта являются существенными для вывода в пункте 4 основных характеризаций малых (E,I)-абсолютов.

Будет рассмотрена следующая ситуация: пусть K_1,K_2 — компакты; $\beta_i : K_i \to H$ являются непрерывными и сюръективными, причём $\beta_i \in 3)$, где i = 1, 2 (см. теорему 1). Считаем, что $\beta_1 \in 1)$ и $\beta_2 \in 2)$. Таким образом, задана диаграмма (K_1,K_2,H), для которой нужно построить замыкающее отображение $q : K_1 \to K_2$.

Предложение 4. Пусть $t \in K_1$ и $B(t) = \{F \in E : t \in \operatorname{int} \beta_1^{-1}(F)\}$. Тогда множество $q(t) = \cap[cl\, \beta_2^{-1}(F \setminus P) : F \in B(t), P \in I]$ состоит из одной точки.

Доказательство. Пусть $q_1, q_2 \in q(t)$. Найдём непересекающиеся $W_1, W_2 \subset K_2$, такие что $q_i \in W_i\ (i = 1, 2)$. Поскольку $\beta_2 \in 2)$, то найдём I-дизъюнктные $F_1, F_2 \in E$ и $P_1 \in I$ для множеств W_1,W_2. С другой стороны, $\beta_1 \in 1)$; поэтому существует $P_2 \in I$ из условия 1). Всегда можно считать, что $P_2 \supset P_1$ и $t \in cl(\beta_1^{-1}(F_1 \setminus P_2))$.

Поскольку K_2 — хаусдорфово, $\beta_2 \in 2)$ и $q_1 \in G = \operatorname{int} cl\, \beta_2^{-1}(F_1 \setminus P_2)$, то существуют $F_3 \in E$ и $P_3 \in I$ со свойствами: $P_3 \supset P_2$, $cl(\beta_2^{-1}(F_3 \setminus P_3)) \supset K_2 \setminus G$ и $q_1 \notin cl(\beta_2^{-1}(F_3 \setminus P_3))$. Тогда $F_1 \cup F_3 = H$. По $\beta_1 \in 3)$ получаем $cl\, \beta_1^{-1}(F_1 \setminus P_2)) \cup \beta_1^{-1}(F_3) = K_1$ и $t \in \operatorname{int} \beta_1^{-1}(F_3)$. По заданию $q(t)$ имеем $q_1 \in cl\, \beta_2^{-1}(F_3 \setminus P_3)$, что противоречит условию $q_1 \notin cl(\beta_2^{-1}(F_3 \setminus P_3))$.

Замечание. Предложение 4 позволяет задать отображение $q : K_1 \to K_2$. Сразу же отметим, что q замыкает диаграмму (K_1, K_2, H). Действительно, если бы $\beta_2 q(t) \neq \beta_1(t)$, то найдём непересекающиеся $F_1, F_2 \in E$ с условиями:

$\beta_1(t)\in \mathrm{int}F_1$, $\beta_2 q(t)\in \mathrm{int}F_2$. Тогда $F_1\in B(t)$ и $q(t)\in\beta_2^{-1}(F_1)\cap\beta_2^{-1}(F_2)=\varnothing$. Противоречие доказывает, что q замыкает диаграмму.

Предложение 5. Отображение $q:K_1\to K_2$ — непрерывное и сюръективное.

Доказательство. Пусть $q(t)\in G\subset K_2$. Найдутся $F\in B(t)$ и $P\in I$, для которых $cl\,\beta_2^{-1}(F\setminus P)\subset G$. Тогда $t\in \mathrm{int}\,\beta_1^{-1}(F)$ и $q(\mathrm{int}\,\beta_1^{-1}(F))\subset G$. Это и означает непрерывность q.

Пусть теперь $s\in K_2$. Докажем, что $s\in q(K_1)$. Предположим противное. Тогда тоже s не принадлежит компакту $q(K_1)$. По $\beta_2\in 2)$ найдём $F\in E$ и $P\in I$, такие что $s\in \mathrm{int}\,cl\,\beta_2^{-1}(F\setminus P)$ и $cl\,\beta_2^{-1}(F\setminus P)\cap q(K_1)=\varnothing$. Если $t\in\beta_1^{-1}(F\setminus P)$, то $q(t)\in\beta_2^{-1}(F\setminus P)$ и поэтому $q(t)\notin q(K_1)$. Пришли к противоречию.

Замечание. Предложение 5 показывает, что отображение $q:K_1\to K_2$ искомое. Оказывается, что q является единственным отображением с этими свойствами.

Предложение 6. Пусть $\gamma:K_1\to K_2$ непрерывное и замыкает диаграмму (K_1,K_2,H). Тогда $\gamma=q$.

Доказательство. Пусть $t\in \mathrm{int}\,\beta_1^{-1}(F)$. Предположим, что $\gamma(t)\notin cl\,\beta_2^{-1}(F\setminus P)$ для некоторого $P\in I$. Существует $W\subset K_2$, такое что $\gamma(t)\in W$ и $W\cap\beta_2^{-1}(F\setminus P)=\varnothing$. Тогда $t\in G=\gamma^{-1}(W)\cap \mathrm{int}\,\beta_1^{-1}(F)$. Найдём $t_1\in G\setminus\beta_1^{-1}(P)$. Тогда $\gamma(t_1)\in W\cap\beta_2^{-1}(F\setminus P)=\varnothing$. Противоречие доказывает, что $\gamma(t)\in cl\,\beta_2^{-1}(F\setminus P)$. По предложению 4 имеем $\gamma(t)=q(t)$.

***Предложение** 7.* Пусть $\beta_1\in 2)$ и $\beta_2\in 1)$ (т. е. для отображения α выполнены условия 1, 2, 3 из теоремы 1). Тогда замыкающее отображение $q:K_1\to K_2$ инъективное.

Доказательство. Пусть $t_1\neq t_2$ в K_1 и $t_i\in W_i\subset K_1$, $W_1\cap W_2=\varnothing\ (i=1;2)$. Поскольку $\beta_1\in 2)$, то можно взять соответствующие $F_1,F_2\in E$ и $P\in I$. Тогда $t_i\in \mathrm{int}\,\beta_1^{-1}(F_i)\ (i=1;2)$. Далее $\beta_2\in 1)$; найдём $P_1\in I$ со свойствами: $P_1\supset P$, $cl\,\beta_2^{-1}(F_1\setminus P_1)\cap cl\,\beta_2^{-1}(F_2\setminus P_1)=\varnothing$. Это означает, что $q(t_1)\neq q(t_2)$.

4. Характеризации малых (*E*,*I*)-абсолютов

Следующие результаты являются непосредственными следствиями предложений 4–7.

Теорема 4. Малый абсолют $(d(E,I),\alpha)$ является единственным непрерывным и сюръективным прообразом H с условиями $\alpha\in 1)$, $\alpha\in 2)$, $\alpha\in 3)$.

Доказательство. Пусть (K,β) — другой прообраз H с этими условиями. По предложению 4 задаём замыкающее отображение $\gamma:K\to d(E,I)$. По предложениям 5 и 7 это отображение является гомеоморфизмом.

Т е о р е м а 5. Малый абсолют $(d(E,I),\alpha)$ является единственным наименьшим непрерывным и сюръективным прообразом H с условиями $\alpha\in 1)$, $\alpha\in 3)$.

Доказательство. Пусть сначала (K,β) — другой прообраз H с условиями 1) и 3). По предложениям 4 и 5 существует $\gamma: K\to d(E,I)$.

Пусть (M,δ) — другой наименьший прообраз H с этими условиями; тогда существует непрерывное и сюръективное $\gamma_1: d(E,I)\to M$. Аналогично существует $\gamma_2: M\to d(E,I)$. Тогда $\gamma_1\gamma_2: d(E,I)\to d(E,I)$ замыкает диаграмму $(d(E,I),d(E,I)),H)$. По теореме 2 $\gamma_2\gamma_1$ является гомеоморфизмом. Поэтому и γ_1 — гомеоморфизм.

Аналогичным образом устанавливается следующий двойственный для теоремы 5 результат.

Т е о р е м а 6. Малый (*E,I*)-абсолют $(d(E,I),\alpha)$ является единственным наибольшим непрерывным и сюръективным прообразом H с условиями: $\alpha\in 2)$, $\alpha\in 3)$.

Следующий результат показывает, что отображение $\alpha: H\to d(E,I)$ является функториальным.

Т е о р е м а 7. Пусть H_1, H_2 — компакты и $(\alpha(E_i,I_i),\alpha_i)$ являются малыми (E_i,I_i)-абсолютами $H_i (i=1;2)$. Пусть $\beta: H_1\to H_2$ непрерывное и сюръективное отображение, причём если $F\in E_2$, то $\beta^{-1}(F)\in E_1$; аналогично если $P\in I_2$, то $\beta^{-1}(P)\in I_1$. Тогда существует единственное непрерывное и сюръективное отображение $s(\beta): d(E_1,I_1)\to d(E_2,I_2)$, для которого $\beta\alpha_1=\alpha_2 s(\beta)$.

Доказательство. Строим замыкающее отображение $r(\beta)$ для диаграммы $(d(E_1,I_1),d(E_2,I_2),H)$. По предложению 6 такое отображение единственное.

Т е о р е м а 8. Для любого малого (*E,I*)-абсолюта *d*(*E,I*) компакта *H* существует непрерывное и сюръективное $\gamma: d(E(H),I(H))\to d(E,I)$.

Доказательство. К тождественному $e: H\to H$ применим теорему 7.

5. Функциональное описание малых (*E,I*)-абсолютов

Известная теорема Накано—Шимогаки даёт описание непрерывных функций на абсолюте Глисона—Пономарёва с помощью функций, заданных на *H* и непрерывных на множествах второй категории. Аналогичным образом непрерывные функции на секвенциальном абсолюте описываются с помощью функций, заданных на *H* и непрерывных на дополнении до объединения последовательности нигде не плотных нуль-множеств ([1]; обобщение см. в работе [3]). Но такое удобное описание уже невозможно для случая счётного абсолюта (см. работу [4]).

Выясним, на каком языке целесообразно описывать непрерывные функции на малых (*E,I*)-абсолютах.

Предложение 7. Пусть $h \in C(d(E,I))$ и $m \in N$. Тогда существует $P = P(m) \in I$ со свойством: если $t \in H \setminus P$ и $A_1, A_2 \in \alpha^{-1}(t)$, то $|h(A_1) - h(A_2)| \le \frac{3}{m}$.

Доказательство. Для любого целого k строим $F(m,k) \in E$ со свойством: $h^{-1}\left(\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]\right) \subset int(<F(m,k)>) \subset <F(m,k)> \subset h^{-1}\left(\frac{k-1}{m}, \frac{k+1}{m}\right)$. Воспользуемся пунктом 2 предложения 2 и найдём $P(m,k) \in I$, для которого $\alpha\left(h^{-1}\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]\right) \setminus P(m,k) \subset int\, F(m,k)$. Тогда $P(m) = \cup P(m,k) \in I$ — искомое: действительно, для $t \in H \setminus P(m)$ найдём $A \in \alpha^{-1}(t)$ и целое k с условием: $\frac{k}{m} \le h(A) \le \frac{k+1}{m}$. По построению $P(m)$ имеем $t = \alpha(A) \in int\, F(m,k)$. По пункту 3 предложения 1 получаем $\alpha^{-1}(t) \subset <F(m,k)> \subset h^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{m}, \frac{k+2}{m}\right]\right)$, что и даёт требуемый результат.

Замечание. Если $t \in H \setminus \cup P(m)$, то h является постоянной на $\alpha^{-1}(t)$. Другими словами, на множестве $H \setminus \cup P(m)$ задаётся функция $f(h): H \setminus P(m) \to R$, где $f(h)(t) = h^{-1}(\alpha^{-1}(t))$. Поскольку функция $h \in C(d(E,I))$, то $f(h) \in C^*(H \setminus P(m))$.

Для функции $h \in C(d(E,I))$ зададим функцию $r(h)$ на компакте H следующим образом: $r(h)(t) = sup(h(A) : A \in \alpha^{-1}(t))$.

Предложение 8. 1) Для функции $r(h)$ выполнено следующее условие (*): если a,b — вещественные числа (где $a<b$), то существуют $F_1, F_2 \in E$ и $P \in I$, для которых $F_1 \cap F_2 \subset P$, $\mathrm{int}F_1 \supset \{t : r(h) \le a\} \setminus P$, $\mathrm{int}F_2 \supset \{t : r(h) \ge b\} \setminus P$. 2) Пусть функция f задана и ограничена на H и для неё выполнено условие (*). Тогда существуют $P_n \in I$, такие что f непрерывна на $H \setminus \cup P_n$.

Доказательство. 1) Найдём $m \in N$ и целое s, для которых $a < \frac{s-1}{m} < \frac{s+2}{m} < b$. Полагаем $F_1 = \cup(F(m,k) : k \le s-1)$, $F_2 = \cup(F(m,k) : k \ge$ $\ge s+2)$ (см. доказательство предложения 7. 2) Пусть $m \in N$ и k — целое; полагаем $a = \frac{k}{m} < b = \frac{k+1}{m}$. Обозначим через $P(m,k)$ то множество $P \in I$, которое указано в условии (*). Тогда $P(m) = \cup(P(m,k)) \in I$ и последовательность $\{P(m)\}$ — искомая.

Предложение 9. Пусть $f : H \to R$ — ограниченная функция, удовлетворяющая условию (*). Тогда существует единственная функция $m(f) \in C(d(E,I))$, которая совпадает с $f\alpha$ на множестве второй категории.

Доказательство. Пусть $P_n \in I$ из пункта 2 предложения 8. Тогда $f\alpha$ непрерывна на множестве $T = d(E,I) \setminus \cup\alpha^{-1}(P_n)$ второй категории. Осталось проверить, что $f\alpha$ может быть непрерывно продолжена с T на весь компакт $d(E,I)$. В противном случае, существуют $A \in d(E,I)$, $m \in N$ и целое k, для которых $A \in cl\left\{A_1 \in T : f(\alpha(A_1)) \le \frac{k}{m}\right\} \cap cl\left\{A_2 \in T : f(\alpha(A_2)) \ge \frac{k+1}{m}\right\}$. Но $\left\{A_1 \in T : f(A_1) \le \frac{k}{m}\right\} \subset < F(1,m,k) >$ и $\left\{A_2 \in T : f(A_2) \ge \frac{k+1}{m}\right\} \subset < F(2,m,k) >$, и эти множества из E являются I-дизъюнктными. Поэтому $< F(1,m,k) > \cap < F(2,m,k) > = \varnothing$. Пришли к противоречию.

Замечание. Предложения 8 и 9 показывают, что непрерывные функции на малом (E,I) -абсолюте $d(E,I)$ могут быть описаны с помощью семейства $M(E,I)$ всех ограниченных функций на H, удовлетворяющих условию (*).

Предложение 10. 1) Пусть $h \in C(d(E,I))$; тогда $mr(h) = h$. 2) Пусть $f \in M(E,I)$; тогда $rm(f)$ совпадает с f на множестве $H \setminus \cup(P_n \in I)$. 3) Пусть $f_1, f_2 \in M(E,I)$, то существует $f \in M(E,I)$, совпадающая с $f_1 + f_2$ на множестве $H \setminus \cup(P_n \in I)$.

Доказательство. Пункт 1 предложения 10 следует из предложения 9. Пункт 2 предложения 10 следует из доказательства предложения 9.

3) Имеем $m(f_1) + m(f_2) \in C(d(E,I))$. Тогда $f = r(m(f_1) + m(f_2))$ — искомая.

Замечание. Пусть $P \in I$ и $f : H \to R$ ограничена и непрерывна на $H \setminus P$. Это не значит, что $f \in M(E,I)$, так как возможны случаи, когда $f\alpha$ не может быть непрерывно продолжена с $d(E,I) \setminus \alpha^{-1}(P)$ на весь компакт $d(E,I)$ (ср. компакт D_1 из примера 1. Это показывает, что условие (*) нельзя заменить на более удобное требование непрерывности на подпространстве H специального вида.

6. Характеризация нехаусдорфовых пространств *d*(*E,I*)

В этом пункте показано, как можно описать $d(E,I)$ в качестве прообраза H, если хаусдорфовость $d(E,I)$ не предполагается. Пусть K — компактное T_1-пространство и $\beta : K \to H$ — непрерывное и сюръективное отображение. Будем считать, что для любого $F \in I$ определено замкнутое $e(F) \subset K$, причём выполнены следующие свойства: а) $e(F_1 \cap F_2) = e(F_1) \cap e(F_2)$; б) если $t \notin K_1 \subset K$, то найдутся E-дизъюнктные $F_1, F_2 \in E$, для которых $t \in e(F_1)$, $K_1 \subset e(F_2)$; в) $e(F) = \varnothing$ тогда, когда $F \in I$.

Предложение 11. Пусть $A \in d(E,I)$. Тогда множество $q(A) = \cap\left(e(F) : F \in A\right)$ состоит из одной точки.

Доказательство. Поскольку K является компактным пространством и выполнено свойство в) $(\equiv \beta \in в))$, то $q(A)$ — непустое. Пусть теперь $q_1, q_2 \in q(A)$. По $\beta \in б)$ найдём I-дизъюнктные $F_1, F_2 \in E$, для которых $q_i \in e(F_i)$. По свойствам отображения $\alpha : d(E,I) \to H$ имеем $< F_1 > \cap < F_2 > = \varnothing$. Можно считать, что $F_1 \notin A$. Поэтому существует $F_3 \in A$, причём F_1, F_3 *I*-дизъюнктные. По $\beta \in а)$, $\beta \in в)$ имеем $e(F_1) \cap e(F_3) = \varnothing$. Это означает, что $q_1 \notin e(F_3)$. Пришли к противоречию.

Замечание. Предложение 12 позволяет задать отображение $q : d(E,I) \to K$. По свойствам $\beta \in а)$ и $\beta \in в)$ получаем, что отображение q — инъективное.

Предложение 12. Отображение *q* является непрерывным и сюръективным.

Доказательство. Пусть $q(A) \in G \subset K$. По $\beta \in б)$ найдём *I*-дизъюнктные $F_1, F_2 \in E$, для которых $q(A) \in e(F_1)$ и $K \setminus G \subset e(F_2)$. Тогда $F_1 \in A$ и $A \in W = d(E,I) \setminus < F_2 >$. Проверим, что $p(W) \subset G$. Для $A_1 \in W$ найдём $F \in A_1$, который *I*-дизъюнктен F_2. Тогда $q(A_1) \notin e(F_2)$ и $q(A_1) \in G$. Непрерывность доказана.

Пусть $s \in K$. Обозначим $B(s) = (F \in E : s \in e(F))$. Тогда $B(s)$ *I*-фильтр и $B(s) \subset A \in d(E,I)$. Установим, что $B(s) = A$: если $F \in A \setminus B(s)$, то $s \notin e(F)$ и существуют *I*-дизъюнктные $F_1, F_2 \in I$ с условиями: $s \in e(F_1)$, $e(F) \subset e(F_2)$. Тогда $F_1 \in B(s)$ и $F \cap F_1 \in I$, что противоречит $F_1, F \in A$. Доказано, что $B(s) = A$. Тогда по заданию $B(s)$ и предложению 11 имеем $q(A) = s$.

Т е о р е м а 9. 1) Отображение $q : d(E,I) \to K$ является гомеоморфизмом. 2) Пространство $d(E,I)$ полностью характеризуется как прообраз *H* со свойствами а), б), в), введенными в разделе 6. 3) Если для *β* выполнено дополнительное свойство г): $e(F) \subset \beta^{-1}(F)$, то $\beta q = \alpha$.

Доказательство. 1) Осталось проверить, что если *P* замкнуто в $d(E,I)$, то $q(P)$ замкнуто в *K*. Пусть $s \notin q(P)$. По предложению 12 найдётся $A \in d(E,I)$, для которого $q(A) = s$. Найдём *I*-дизъюнктные $F_1, F_2 \in E$, такие что $A \in < F_1 >$, $P \subset < F_2 >$. Тогда $e(F_1) \cap e(F_2) = \varnothing$, что даёт $s \in e(F_1) \subset K \setminus e(F_2) = W$. Таким образом, у точки *s* существует окрестность *W*, не пересекающая $q(P)$.

2) Утверждение следует из пункта 1 доказательства теоремы 9 и того факта, что $\alpha \in а)$, $\alpha \in б)$, $\alpha \in в)$.

3) Предположим, что $\beta(q(A)) \neq \alpha(A)$. Найдём непересекающиеся $F_1, F_2 \in E$ с условиями: $\alpha(A) \in int\, F_1$, $\beta(q(A)) \in int\, F_2$. Тогда $A \in < F_1 >$ и $q(A) \in e(F_1) \subset \beta^{-1}(F_1)$. Получаем $\beta\gamma(A) \in F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Пришли к противоречию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колдунов А. В. , Захаров В. К.* Секвенциальный абсолют и его характеризации: Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. С. 278–284.

2. *Колдунов А. В.* Обобщённые дедекиндовы пополнения упорядоченных множеств, групп и векторных решёток: Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. С. 1297–1301.

3. *Колдунов А. В.* O_I-абсолюты и интегрируемые по Риману функции // Сиб. матем. журнал. 1987. Т. 28. № 5. С. 70–77.

4. *Koldunov A. V. , Zaharov V. K.* Characterization of the σ-cover of a compact // Math. Nach. 1982. V. 108. P. 7–16.

5. *Clifford A. H.* Partially ordered abelian groups // Ann. of Math. 1941. V. 41. P. 280–284.
6. *Flachsmegyer J. Dedekind* — McNeill extensions of Boolean algebras and vector lattices // Gen. Topol. Applic. 1978. V. 8. P. 63–66.
7. *Papangelou F.* Order convergence and topological completion of commutative lattice groups // Math. Ann. 1964. V. 155.P. 81–107.
8. *Woods R. G.* A survey of absolutes of topological spaces // Topol. Structures. Part 2. Math. Centre Tracts. 1979. V. 116. P. 323–362.

REFERENCES

1. *Koldunov A. V., Zaharov V. K.* Sekvencial'nyj absoljut i ego harakterizacii: Dokl. AN SSSR. 1980. T. 253. S. 278–284.
2. *Koldunov A. V.* Obobwjonnye dedekindovy popolnenija uporjadochennyh mnozhestv, grupp i vektornyh reshjotok: Dokl. AN SSSR. 1989. T. 308. S. 1297–1301.
3. *Koldunov A. V.* o_I -absoljuty i integriruemye po Rimanu funkcii. Sib. mat. zhurn. 1987. T. 28. № 5. S. 70–77.
4. *Koldunov A. V., Zaharov V. K.* Characterization of the σ -cover of a compact // Math. Nach. 1982. V. 108. P. 7–16.
5. *Clifford A. H.* Partially ordered abelian groups // Ann. of Math. 1941. V. 41. P. 280–284.
6. *Flachsmegyer J. Dedekind* — McNeill extensions of Boolean algebras and vector lattices // Gen. Topol. Applic. 1978. V. 8. P. 63–66
7. *Papangelou F.* Order convergence and topological completion of commutative lattice groups // Math. Ann. 1964. V. 155. P. 81–107.
8. *Woods R. G.* A survey of absolutes of topological spaces // Topol. structures. Part 2; Math. Centre Tracts. 1979. V. 116. P. 323–362.