В. Ф. Зайцев, К. В. Павлюков

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СИСТЕМ АВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается разрешимость прямой и обратной задач группового анализа для некоторых видов систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Найдены широкие классы систем такого вида, допускающих операторы группы Ли точечных преобразований. Доказано, что исследование подобных систем сводится к рассмотрению систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, причём первое уравнение является уравнением Абеля второго рода и может решаться независимо от второго уравнения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, групповой анализ, обратная задача.

V. Zaitsev, K. Pavlukov

ON THE RIGHT AND INVERSE PROBLEMS OF GROUP ANALYSIS OF THE AUTONOMOUS SYSTEMS OF ORDINARY SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

The solvability of the right and inverse problem of group analysis for some systems of two ordinary second-order differential equations is discussed. Large classes of such systems that allow a Lie group operators have been found. It has *been proved that the studies of such systems are reduced to studies of the systems of two ordinary first-order differential equations, where the first equation is the Abel 2nd kind equation and it is solved independently of the second equation of the system.*

Keywords: differential equation, group analysis, inverse problem.

В работе рассматривается решение прямой и обратной задач группового анализа для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'' = F(y,z), \\ z'' = G(y,z), \end{cases} \tag{1}$$

допускающей оператор группы Ли точечных преобразований

$$X = \xi(x,y,z)\partial_x + \eta(x,y,z)\partial_y + \zeta(x,y,z)\partial_z . \tag{2}$$

Классический алгоритм группового анализа даёт для системы (1) координаты оператора (2) в виде:

$$\xi(x,y,z) = 2a, \tag{3}$$

$$\eta(x,y,z) = (a' + \alpha)y + \beta z + b, \tag{4}$$

$$\zeta(x,y,z) = (a' + \gamma)z + \delta y + c, \tag{5}$$

где $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$ – произвольные функции, α, β, γ, δ – произвольные постоянные, и при этом выполняются условия

$$a'''y + b'' + (\alpha - 3a')F + \beta G - \big((\alpha + a')y + \beta z + b\big)F'_y - \big((\gamma + a')y + \delta z + c\big)F'_z = 0, \tag{6}$$

$$a'''z + c'' + (\gamma - 3a')G + \delta F - \big((\alpha + a')y + \beta z + b\big)G'_y - \big((\gamma + a')y + \delta z + c\big)G'_z = 0. \tag{7}$$

Так как функции F, G не зависят от переменной x, то, очевидно, свободные члены, коэффициенты при F и G и их производных в обоих уравнениях не должны зависеть от x. Тогда получаем, что $a' = \mathrm{const}$, $b = c = 0$ и уравнения (6), (7) упрощаются:

$$(\alpha - 3a')F + \beta G - \big((\alpha + a')y + \beta z\big)F'_y - \big((\gamma + a')y + \delta z\big)F'_z = 0, \tag{8}$$

$$(\gamma - 3a')G + \delta F - \big((\alpha + a')y + \beta z\big)G'_y - \big((\gamma + a')y + \delta z\big)G'_z = 0. \tag{9}$$

Подстановкой $F = e^{\varphi_1}\widetilde{F}$, $G = e^{\varphi_2}\widetilde{G}$, где $\varphi_1 = \varphi_1(y,z)$, $\varphi_2 = \varphi_2(y,z)$ уравнения (8), (9) приводятся к виду:

$$\beta e^{\varphi_2 - \varphi_1}\widetilde{G} - \big((\alpha + a')y + \beta z\big)\widetilde{F}'_y - \big((\gamma + a')z + \delta y\big)\widetilde{F}'_z = 0, \tag{10}$$

$$\delta e^{\varphi_1 - \varphi_2}\widetilde{F} - \big((\alpha + a')y + \beta z\big)\widetilde{G}'_y - \big((\gamma + a')z + \delta y\big)\widetilde{G}'_z = 0 \tag{11}$$

с условиями

$$\alpha - 3a' - \big((\alpha + a')y + \beta z\big)\varphi'_{1y} - \big((\gamma + a')z + \delta y\big)\varphi'_{1z} = 0, \tag{12}$$

$$\gamma - 3a' - \big((\alpha + a')y + \beta z\big)\varphi'_{2y} - \big((\gamma + a')z + \delta y\big)\varphi'_{2z} = 0. \tag{13}$$

Чтобы найти φ_1 из уравнения (12), рассмотрим соответствующее характеристическое уравнение

$$\frac{d\varphi_1}{\alpha - 3a'} = \frac{dy}{(\alpha + a')y + \beta z} = \frac{dz}{(\gamma + a')z + \delta y}. \tag{14}$$

Из равенства двух последних отношений можно попытаться найти зависимость, например, $z = z(y)$. При этом получим ОДУ 1-го порядка

$$\frac{dz}{dy} = \frac{(\gamma + a')z + \delta y}{(\alpha + a')y + \beta z}, \tag{15}$$

при решении которого возникает несколько следующих частных случаев.

Случай, когда $\beta = 0$, $a' + \alpha = 0$ (знаменатель правой части уравнения (15) равен нулю), подробно рассмотрен в работе [1]. Очевидно, что оператор $X_1 = \partial_x$ допускается любой автономной системой, а в данном конкретном случае дополнительный оператор X_2 с координатами

$$\xi = 2c_1,\ \eta = 0,\ \zeta = (c_1 + \gamma)z + \delta y,$$

допускается системой

$$\begin{cases} y'' = \left|(c_1 + \gamma)z + \delta y\right|^{\frac{-4c_1}{c_1+\gamma}} \Phi(y), \\ z'' = -\dfrac{\delta}{c_1 + \gamma}\left|(c_1 + \gamma)z + \delta y\right|^{\frac{-4c_1}{c_1+\gamma}} \Phi(y) + \left|(c_1 + \gamma)z + \delta y\right|^{\frac{\gamma-3c_1}{c_1+\gamma}} \varphi(y). \end{cases} \tag{16}$$

где $\Phi(y)$, $\varphi(y)$ — произвольные функции, c_1, δ, γ — произвольные постоянные. Система (16) в инвариантах оператора X_2 имеет вид

$$\begin{cases} Y\left(\dfrac{dY}{dX} - 1\right) = \left[(c_1 + \gamma)\tau\right]^{\frac{-4c_1}{c_1+\gamma}} \Phi(X), \\ Y\dfrac{dZ}{dX} + \dfrac{\gamma - c_1}{2c_1} Z = \left[(c_1 + \gamma)\tau\right]^{\frac{\gamma-3c_1}{c_1+\gamma}} \varphi(X), \end{cases}$$

где величина τ не является дифференциальной переменной и может рассматриваться как параметр, $\varphi(X)$, $\Phi(X)$ — произвольные функции.

Это — система двух уравнений первого порядка относительно $Y = Y(X)$ и $Z = Z(X)$, причём первое уравнение является уравнением Абеля второго рода и может решаться независимо от второго [так как не содержит $Z = Z(X)$], а второе — линейное относительно $Z = Z(X)$ и всегда решается в квадратурах, если найдена функция $Y = Y(X)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\beta = 0$, $a' + \alpha \neq 0$. Тогда ОДУ (15) становится линейным неоднородным

$$\frac{dz}{dy} = \frac{a' + \gamma}{(a' + \alpha)y} z + \frac{\delta}{a' + \alpha} \tag{17}$$

и в зависимости от a', β, γ существуют три решения этого уравнения.

Пусть $\beta = 0$, $a' + \alpha \neq 0$, $a' + \gamma \neq 0$, $\alpha \neq \gamma$. Тогда ОДУ (15) имеет общее решение

$$z(y) = I_1 y^{\frac{a'+\gamma}{a'+\alpha}} + \frac{\delta}{\alpha - \gamma} y. \tag{18}$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{\delta}{\gamma - \alpha} y^{\frac{\alpha - \gamma}{a' + \alpha}} + z y^{-\frac{a' + \gamma}{a' + \alpha}}.$$

В рассматриваемом случае уравнение (14) имеет вид

$$\frac{d\varphi_1}{\alpha - 3a'} = \frac{dy}{(a' + \alpha)y} = \frac{dz}{(a' + \gamma)z + \delta y}.$$

Отсюда из первых двух отношений находим

$$\varphi_1 = \frac{\alpha - 3a'}{a' + \alpha} \ln y + f_1\left(\frac{\delta}{\gamma - \alpha} y^{\frac{\alpha - \gamma}{a' + \alpha}} + z y^{-\frac{a' + \gamma}{a' + \alpha}} \right),$$

где f_1 — произвольная функция своего аргумента. Аналогичным образом находим общее решение уравнения (13)

$$\varphi_2 = \frac{\alpha - 3a'}{a' + \alpha} ln\, y + f_2\left(\frac{\delta}{\gamma - \alpha} y^{\frac{\alpha - \gamma}{a' + \alpha}} + z y^{-\frac{a' + \gamma}{a' + \alpha}} \right),$$

где f_2 — произвольная функция своего аргумента. В рассматриваемом случае уравнение (10) имеет вид

$$(a' + \alpha) y \widetilde{F}'_y + ((a' + \gamma)z + \delta y)\widetilde{F}'_z = 0,$$

его общее решение

$$\widetilde{F} = \Phi\left(\frac{\delta}{\gamma - \alpha} y^{\frac{\alpha - \gamma}{a' + \alpha}} + z y^{-\frac{a' + \gamma}{a' + \alpha}} \right),$$

где Φ — произвольная функция своего аргумента. Отсюда находим $F(y, z)$:

$$F = e^{\varphi_1} \widetilde{F} = y^{\frac{\alpha - 3a'}{a' + \alpha}} e^{f_1} \Phi.$$

Решение уравнения с частными производными (11), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\delta e^{\varphi_1 - \varphi_2} \widetilde{F} - (\alpha + a') y \widetilde{G}'_y - \big((\gamma + a')z + \delta y\big)\widetilde{G}'_z = 0,$$

сводится к решению характеристического уравнения

$$\frac{d\widetilde{G}}{\delta e^{\varphi_1 - \varphi_2} \widetilde{F}} = \frac{dy}{(\alpha + a')y + \beta z} = \frac{dz}{(\gamma + a')z + \delta z}. \qquad (19)$$

Два последних отношения уравнения дают известную зависимость

$$z = z(y). \qquad (18).$$

Для дальнейшего решения (19) нужно подставить $z = z(y)$ в $\widetilde{F}$, φ_1, φ_2. Получаем $\widetilde{F} = \Phi(I_1)$, $\varphi_1 = \dfrac{\alpha - 3a'}{a' + \alpha} \ln y + f_1(I_1)$, $\varphi_2 = \dfrac{\gamma - 3a'}{a' + \alpha} \ln y + f_2(I_1)$.

Из первых двух отношений (19) находим $\widetilde{G}$:

$$\widetilde{G}(y)=\frac{\delta}{a'+\alpha}\int\frac{1}{y}e^{\varphi_1-\varphi_2}\Phi(I_1)dy+I_3=\frac{\delta}{\alpha-\gamma}e^{f_1(I_1)-f_2(I_1)}\Phi(I_1)y^{\frac{\alpha-\gamma}{a'+\alpha}}+I_2,$$

где I_2 — произвольная постоянная. Общим решением уравнения (19) будет

$$\widetilde{G}(y)=\frac{\delta}{\alpha-\gamma}e^{f_1(I_1)-f_2(I_1)}\Phi(I_1)y^{\frac{\alpha-\gamma}{a'+\alpha}}+\varphi\left(\frac{\delta}{\alpha-\gamma}y^{\frac{\alpha-\gamma}{a'+\alpha}}+zy^{-\frac{a'+\gamma}{a'+\alpha}}\right),$$

где φ — произвольная функция своего аргумента. Теперь можно найти G:

$$G=e^{\varphi_2}\widetilde{G}=\frac{\delta}{\alpha-\gamma}e^{f_1}\Phi y^{\frac{\alpha-3a'}{a'+\alpha}}+\varphi e^{f_2}y^{\frac{\gamma-3a'}{a'+\alpha}},$$

где φ, Φ, f_1, f_2 — произвольные функции. Аргументом этих функций является выражение $\frac{\delta}{\gamma-\alpha}y^{\frac{\alpha-\gamma}{a'+\alpha}}+zy^{-\frac{a'+\gamma}{a'+\alpha}}$.

Таким образом, получаем оператор X_2 с координатами

$$\xi=2(c_1x+c_0),\ \eta=(c_1+\alpha)y,\ \zeta=(a'+\gamma)z+\delta y$$

(оператор $X_1=\partial_x$ допускается любой автономной системой), который допускается системой

$$\begin{cases}F=y^{\frac{\alpha-3c_1}{c_1+\alpha}}e^{f_1(I_1)}\Phi(I_1),\\ G=\frac{\delta}{\alpha-\gamma}y^{\frac{\alpha-3c_1}{c_1+\alpha}}e^{f_1(I_1)}\Phi(I_1)+\varphi(I_1)e^{f_2}y^{\frac{\gamma-3c_1}{c_1+\alpha}}\end{cases}\tag{20}$$

с условиями $c_1+\alpha\neq 0$, $c_1+\gamma\neq 0$, $\alpha\neq\gamma$ (где c_1, c_0, δ, γ — произвольные постоянные). Так как Φ и f_1 — произвольные функции одного и того же аргумента, можно переобозначить $e^{f_1(I_1)}\Phi(I_1)\to\Phi(I_1)$. Тогда система (20) принимает вид:

$$\begin{cases}y''=y^{\frac{\alpha-3c_1}{c_1+\alpha}}\Phi\left(\frac{\delta}{\gamma-\alpha}y^{\frac{\alpha-\gamma}{c_1+\alpha}}+zy^{-\frac{c_1+\gamma}{c_1+\alpha}}\right),\\ z''=\frac{\delta}{\alpha-\gamma}y^{\frac{\alpha-3c_1}{c_1+\alpha}}\Phi\left(\frac{\delta}{\gamma-\alpha}y^{\frac{\alpha-\gamma}{c_1+\alpha}}+zy^{-\frac{c_1+\gamma}{c_1+\alpha}}\right)+\varphi\left(\frac{\delta}{\gamma-\alpha}y^{\frac{\alpha-\gamma}{c_1+\alpha}}+zy^{-\frac{c_1+\gamma}{c_1+\alpha}}\right)e^{f_2}y^{\frac{\gamma-3c_1}{c_1+\alpha}}.\end{cases}\tag{21}$$

Продолженный на переменные y', z', y'', z'', этот оператор X_2 имеет вид

$$X_2 = 2c_1 x\partial_x + (c_1+\alpha)y\partial_y + ((c_1+\gamma)z + \delta y)\partial_z + \\ + (\alpha - c_1)y'\partial_{y'} + ((\gamma - c_1)z' + \delta y')\partial_{z'} + \\ + (\alpha - 3c_1)y''\partial_{y''} + ((\gamma - 3c_1)z'' + \delta y'')\partial_{z''}.$$

Запишем полученную систему в инвариантах оператора X_2. Из характеристического уравнения

$$\frac{dx}{2c_1x} = \frac{dy}{(c_1+\alpha)y} = \frac{dz}{(c_1+\gamma)z+\delta y} = \frac{dy'}{(\alpha - c_1)y'} = \frac{dz'}{(\gamma - c_1)z' + \delta y'}$$

находим независимые инварианты оператора X_2

$$X = yx^{-\frac{c_1+\alpha}{2c_1}},\ \tau = x^{-\frac{c_1+\alpha}{2c_1}}\left(z - \frac{\delta}{\alpha-\gamma}y\right)$$

и дифференциальные инварианты первого порядка

$$Y = y'x^{\frac{c_1-\alpha}{2c_1}},\ Z = x^{\frac{c_1-\gamma}{2c_1}}\left(z' - \frac{\delta}{\alpha-\gamma}y'\right).$$

Переменные y'' и z'' выражаются соответственно из производных $\frac{dY}{dX}$ и $\frac{dZ}{dX}$. Записав систему (21) в новых переменных $Y = Y(X)$, $Z = Z(X)$ (величина τ не является дифференциальной переменной и может рассматриваться как параметр), получим

$$\begin{cases} \left(Y - \dfrac{c_1+\alpha}{2c_1}X\right)\dfrac{dY}{dX} - \dfrac{c_1-\alpha}{2c_1}Y = X^{\frac{\alpha-3c_1}{\alpha+c_1}}\Phi(\tau X^{-\frac{\gamma+c_1}{\alpha+c_1}}), \\ \left(Y - \dfrac{c_1+\alpha}{2c_1}X\right)\dfrac{dZ}{dX} - \dfrac{c_1-\gamma}{2c_1}Y = X^{\frac{\gamma-3c_1}{\alpha+c_1}}\varphi(\tau X^{-\frac{\gamma+c_1}{\alpha+c_1}}), \end{cases}$$

где φ, Φ — произвольные функции аргумента $\tau X^{-\frac{\gamma+c_1}{\alpha+c_1}}$.

Пусть теперь в уравнении (17) $\beta = 0$, $a' + \alpha \neq 0$, $a' + \gamma \neq 0$, $\alpha = \gamma$. Тогда ОДУ (17) (и соответственно (15)) имеет общее решение

$$z(y) = I_1 y + \frac{\delta}{\alpha-\gamma} y \ln y.$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{z}{y} - \frac{\delta}{a'+\alpha}\ln y.$$

Из первых двух отношений (14) находим

$$\varphi_1 = \frac{\alpha - 3a'}{a' + \alpha} \ln y + f_1\left(\frac{z}{y} - \frac{\delta}{a' + \alpha} \ln y \right),$$

где f_1 — произвольная функция своего аргумента. Аналогичным образом находим общее решение уравнения (13)

$$\varphi_2 = \frac{\gamma - 3a'}{a' + \alpha} \ln y + f_2\left(\frac{z}{y} - \frac{\delta}{a' + \alpha} \ln y \right),$$

где f_2 — произвольная функция своего аргумента. В рассматриваемом случае уравнение (10) имеет вид

$$(a' + \alpha) y \widetilde{F}'_y + ((a' + \gamma) z + \delta y) \widetilde{F}'_z = 0 .$$

Его общее решение

$$\widetilde{F} = \Phi(I_1) = \Phi\left(\frac{z}{y} - \frac{\delta}{a' + \alpha} \ln y \right),$$

Φ — произвольная функция своего аргумента. Отсюда находим $F(y, z)$:

$$F = e^{\varphi_1} \widetilde{F} = y^{\frac{\alpha - 3a'}{a' + \alpha}} e^{f_1} \Phi .$$

Из УЧП (11) находим $\widetilde{G}$:

$$\widetilde{G}(y) = \frac{\delta}{a' + \alpha} e^{f_1(I_1) - f_2(I_1)} \Phi(I_1) \ln y + \varphi(I_1),$$

где φ — произвольная функция своего аргумента. Теперь можно найти G:

$$G = e^{\varphi_2} \widetilde{G} = \frac{\delta}{a' + \alpha} y^{\frac{\alpha - 3a'}{a' + \alpha}} e^{f_1} \Phi \ln y + \varphi e^{f_2} y^{\frac{\alpha - 3a'}{a' + \alpha}} ,$$

где φ, Φ, f_1, f_2 — произвольные функции. Аргументом этих функций является выражение $\frac{z}{y} - \frac{\delta}{a' + \alpha} \ln y$. Можно переобозначить $e^{f_1(I_1)} \Phi(I_1) \to \Phi(I_1)$, $e^{f_2(I_1)} \varphi(I_1) \to \varphi(I_1)$.

Таким образом, оператор X_2 с координатами

$$\xi = 2c_1 x , \ \eta = (c_1 + \alpha) y , \ \zeta = (a' + \alpha) z + \delta y$$

(оператор $X_1 = \partial_x$ допускается любой автономной системой) допускается системой

$$\begin{cases} y'' = y^{\frac{\alpha - 3c_1}{c_1 + \alpha}} \Phi\left(\dfrac{z}{y} - \dfrac{\delta}{c_1 + \alpha} \ln y \right), \\ z'' = y^{\frac{\alpha - 3c_1}{c_1 + \alpha}} \left(\dfrac{\delta}{c_1 + \alpha} \Phi\left(\dfrac{z}{y} - \dfrac{\delta}{c_1 + \alpha} \ln y \right) \ln y + \varphi\left(\dfrac{z}{y} - \dfrac{\delta}{c_1 + \alpha} \ln y \right) \right), \end{cases} \qquad (22)$$

где φ, Φ, — произвольные функции c_1, α, δ, γ — произвольные постоянные, $c_1+\alpha\neq 0$.

Продолженный на переменные y', z', y'', z'', оператор X_2 имеет вид

$$X_2 = 2c_1 x\partial_x + (c_1+\alpha)y\partial_y + ((c_1+\alpha)z+\delta y)\partial_z + \\ +(\alpha-c_1)y'\partial_{y'} + ((\alpha-c_1)z'+\delta y')\partial_{z'} + \\ +(\alpha-3c_1)y''\partial_{y''} + ((\alpha-3c_1)z''+\delta y'')\partial_{z''}.$$

Запишем систему (22) в инвариантах оператора X_2. Из характеристического уравнения

$$\frac{dx}{2c_1 x} = \frac{dy}{(c_1+\alpha)y} = \frac{dz}{(c_1+\alpha)z+\delta y} = \frac{dy'}{(\alpha-c_1)y'} = \frac{dz'}{(\alpha-c_1)z'+\delta y'}$$

находим независимые инварианты оператора X_2

$$X = yx^{-\frac{c_1+\alpha}{2c_1}},\ \tau = x^{-\frac{c_1+\alpha}{2c_1}}\left(z-\frac{\delta}{2c_1}y\ln x\right)$$

и дифференциальные инварианты первого порядка

$$Y = y'x^{\frac{c_1-\alpha}{2c_1}},\ Z = x^{\frac{c_1-\alpha}{2c_1}}\left(z'-\frac{\delta}{2c_1}y'\ln x\right).$$

Переменные y'' и z'' выражаются соответственно из производных $\frac{dY}{dX}$ и $\frac{dZ}{dX}$. Записав систему (22) в новых переменных $Y=Y(X)$, $Z=Z(X)$ (величина τ не является дифференциальной переменной и может рассматриваться как параметр), получим

$$\begin{cases} \left(Y-\frac{c_1+\alpha}{2c_1}X\right)\frac{dY}{dX} - \frac{c_1-\alpha}{2c_1}Y = X^{\frac{\alpha-3c_1}{\alpha+c_1}}\Phi\left(\frac{\tau}{X}-\frac{\delta}{c_1+\alpha}\ln X\right), \\ \left(Y-\frac{c_1+\alpha}{2c_1}X\right)\frac{dZ}{dX} - \frac{c_1-\alpha}{2c_1}Z - Y = \\ \qquad = X^{\frac{\gamma-3c_1}{\alpha+c_1}}\left(\frac{\delta}{c_1+\alpha}\Phi\left(\frac{\tau}{X}-\frac{\delta}{c_1+\alpha}\ln X\right)\ln X + \varphi\left(\frac{\tau}{X}-\frac{\delta}{c_1+\alpha}\ln X\right)\right). \end{cases}$$

В более общем случае, когда $\beta\neq 0$, $2a'+\alpha+\gamma=0$, общим решением уравнения (15) является

$$z(y) = -\frac{a'+\alpha}{\beta}y \pm \frac{1}{\beta}\sqrt{I_1\beta^2 + y^2(\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2)}, \tag{23}$$

где I_1 — в данном случае — произвольная постоянная и в то же время один из двух независимых интегралов характеристического уравнения (14) в рассматриваемом случае. Из выражения (23) следует

$$I_1 = \frac{1}{\beta^2}\left(\beta^2 z^2 + 2\beta(a' + \alpha)yz + (2\alpha^2 + 4\alpha a' - \beta\delta)y^2\right). \qquad (24)$$

Подставим (23) в два первых отношения (14) и найдём φ_1:

$$\varphi_1 = \pm(3a' - \alpha)\int \frac{dy}{\sqrt{I_1\beta^2 + y^2(\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2)}} + I_2^{(1)}(I_1).$$

Аналогичным способом находим φ_2:

$$\varphi_2 = \mp(5a' + 3\alpha)\int \frac{dy}{\sqrt{I_1\beta^2 + y^2(\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2)}} + I_2^{(2)}(I_1).$$

В зависимости от знака выражения $\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2$ существует всего два значения интеграла $\int \frac{dy}{\sqrt{I_1\beta^2 + y^2(\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2)}}$.

Так, если $I_1 \neq 0$, $\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2 > 0$, то

$$\varphi_1 = \frac{\pm(3a' - \alpha)}{\sqrt{\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2}} \ln\left(y + \sqrt{\frac{I_1\beta^2}{\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2} + y^2}\right) + I_2^{(1)}(I_1),$$

$$\varphi_2 = \frac{\mp(5a' + \alpha)}{\sqrt{\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2}} \ln\left(y + \sqrt{\frac{I_1\beta^2}{\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2} + y^2}\right) + I_2^{(2)}(I_1),$$

где $I_2^{(1)}$, $I_2^{(1)}$ — произвольные функции. С учётом выражения (24) полученные формулы можно записать так:

$$\varphi_1 = \frac{\pm(3a' - \alpha)}{\sqrt{\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2}} \ln\left(y + \frac{\beta z + (\alpha + a')y}{\sqrt{\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2}}\right) + f_1,$$

$$\varphi_2 = \frac{\mp(5a' + \alpha)}{\sqrt{\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2}} \ln\left(y + \frac{\beta z + (\alpha + a')y}{\sqrt{\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2}}\right) + f_2,$$

где f_1, f_2 — произвольные функции аргумента

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\beta^2 z^2 + 2\beta(a' + \alpha)yz + (2\alpha^2 + 4\alpha a' - \beta\delta)y^2\right). \qquad (25)$$

Найдём разность $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{k}{\sqrt{\beta\delta+a'^2-2\alpha a'-\alpha^2}}\ln\left(y+\frac{\beta z+(\alpha+a')y}{\sqrt{\beta\delta+a'^2-2\alpha a'-\alpha^2}}\right)+f_3,$$

где f_3 — произвольная функция аргумента (25), $k=\pm(8a'+2\alpha)$. Обозначив $l=\dfrac{k}{\sqrt{\beta\delta+(a')^2-2\alpha a'-\alpha^2}}$, получим

$$e^{\varphi_1-\varphi_2}=\left(y+(\beta z+(\alpha+a')y)\frac{l}{k}\right)^l e^{f_3}.$$

Решение системы уравнений (10), (11) относительно F и G сводится [2] к решению системы двух линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка от одной неизвестной функции каждое:

$$\begin{gathered}\left[(a'+\alpha)y+\beta z\right]f'_y+\left[-(a'+\alpha)z+\delta y\right]f'_z+\\ +\beta\left(y+\frac{\beta z+(\alpha+a')y}{\sqrt{\beta\delta+(a')^2-2\alpha a'-\alpha^2}}\right)^{-l}e^{-f_3}Gf'_F+\\ +\delta\left(y+\frac{\beta z+(\alpha+a')y}{\sqrt{\beta\delta+(a')^2-2\alpha a'-\alpha^2}}\right)^{l}e^{f_3}Ff'_G=0;\end{gathered}\tag{26}$$

$$\begin{gathered}\left[(a'+\alpha)y+\beta z\right]f'_y+\left[-(a'+\alpha)z+\delta y\right]g'_z+\\ +\beta\left(y+\frac{\beta z+(\alpha+a')y}{\sqrt{\beta\delta+(a')^2-2\alpha a'-\alpha^2}}\right)^{-l}e^{-f_3}\tilde{G}g'_{\tilde{F}}+\\ +\delta\left(y+\frac{\beta z+(\alpha+a')y}{\sqrt{\beta\delta+(a')^2-2\alpha a'-\alpha^2}}\right)^{l}e^{f_3}\tilde{F}g'_{\tilde{G}}=0,\end{gathered}\tag{27}$$

где система

$$\begin{cases}f(y,z,\tilde{F},\tilde{G})=0,\\ g(y,z,\tilde{F},\tilde{G})=0\end{cases}$$

разрешима относительно $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ — решений системы (10), (11). Так как уравнения (26), (27) одинаковые с точностью до f и g, то решение обратной задачи можно свести к рассмотрению одного линейного уравнения с частными производными первого порядка одной неизвестной функции. Характеристическое уравнение для уравнения (26) имеет вид

$$\frac{dy}{(a'+\alpha)y+\beta z}=\frac{dz}{-(a'+\alpha)z+\delta y}=\frac{d\widetilde{F}}{\beta\left(y+(\beta z+(a'+\alpha)y)\dfrac{l}{k}\right)^{-l}e^{-f_3}\widetilde{G}}=$$
$$=\frac{d\widetilde{G}}{\delta\left(y+(\beta z+(a'+\alpha)y)\dfrac{l}{k}\right)^{l}e^{f_3}\widetilde{F}}. \tag{28}$$

Первые два отношения этого характеристического уравнения дают уже известную (23) зависимость $z=z(y)$, пользуясь которой и двумя последними соотношениями характеристического уравнения (28), получаем систему двух ОДУ первого порядка с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}\dfrac{d\widetilde{F}}{dy}=\dfrac{\beta\left(y+A\dfrac{l}{k}\right)^{-l}e^{-f_3}\widetilde{G}}{A},\\[2ex]\dfrac{d\widetilde{G}}{dy}=\dfrac{\delta\left(y+A\dfrac{l}{k}\right)^{l}e^{f_3}\widetilde{F}}{A},\end{cases} \tag{29}$$

где $A=\pm\dfrac{1}{\beta}\sqrt{I_1\beta^2+y^2(\beta\delta+a'^2-2\alpha a'-\alpha^2)}$. Решение этой системы сводится к решению ОДУ второго порядка

$$\left(I_1\beta^2+y^2(\beta\delta+a'^2-2\alpha a'-\alpha^2)\right)\frac{d^2\widetilde{F}}{dy^2}+$$
$$+\frac{k\beta(y\pm\beta)}{(y\beta^2\pm1)\sqrt{I_1\beta^2+y^2(\beta\delta+a'^2-2\alpha a'-\alpha^2)}}\frac{d\widetilde{F}}{dy}+ \tag{30}$$
$$+y(\beta\delta+a'^2-2\alpha a'-\alpha^2)\frac{d\widetilde{F}}{dy}-\beta^3\delta\widetilde{F}=0.$$

Канонический вид этого уравнения достаточно сложный.

В случае, когда $k=0$, уравнение (26) принимает вид

$$\frac{dy}{(a'+\alpha)y+\beta z}=\frac{dz}{-(a'+\alpha)z+\delta y}=\frac{d\widetilde{F}}{\beta e^{-f_3}\widetilde{G}}=\frac{d\widetilde{G}}{\delta e^{f_3}\widetilde{F}},$$

система (29)

$$\begin{cases}\dfrac{d\widetilde{F}}{dy}=\dfrac{\beta e^{-f_3}\widetilde{G}}{A},\\[2ex]\dfrac{d\widetilde{G}}{dy}=\dfrac{\delta e^{f_3}\widetilde{F}}{A},\end{cases}$$

а уравнение (30)

$$\beta^2 A^2 \frac{d^2\widetilde{F}}{dy^2} + (\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2) y \frac{d\widetilde{F}}{dy} - \beta^3 \delta \widetilde{F} = 0. \qquad (31)$$

Так как $k = 0$, то $\alpha = -4a'$, $A = \pm\frac{1}{\beta}\sqrt{I_1\beta^2 + y^2(\beta\delta - 7a'^2)}$, уравнение (31) записывается в виде

$$\left(I_1\beta^2 + y^2(\beta\delta - 7a'^2)\right)\frac{d^2\widetilde{F}}{dy^2} + (\beta\delta - 7a'^2) y \frac{d\widetilde{F}}{dy} - \beta^3\delta\widetilde{F} = 0.$$

Полученное уравнение можно привести к канонической форме:

$$\frac{d^2u}{du^2} + \left(\frac{(\beta\delta - 7a'^2)(3(\beta\delta - 7a'^2)y^2 - I_1\beta^2)}{2(I_1\beta^2 + y^2(\beta\delta - 7a'^2))^3} - \frac{\beta^3\delta}{I_1\beta^2 + y^2(\beta\delta - 7a'^2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{(\beta\delta - 7a'^2)^2 y^2}{4(I_1\beta^2 + y^2(\beta\delta - 7a'^2))^4} \right) u = 0.$$

Если $I_1 \neq 0$, $\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2 < 0$, то

$$\varphi_1 = \frac{\pm(3a' - \alpha)}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha a' - \beta\delta - a'^2}} \arcsin\left(y\sqrt{\frac{\alpha^2 + 2\alpha a' - \beta\delta - a'^2}{I_1\beta^2}} \right) + I_2^{(1)}(I_1),$$

$$\varphi_2 = \frac{\pm(5a' + 3\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha a' - \beta\delta - a'^2}} \arcsin\left(y\sqrt{\frac{\alpha^2 + 2\alpha a' - \beta\delta - a'^2}{I_1\beta^2}} \right) + I_2^{(2)}(I_1),$$

где $I_2^{(1)}$, $I_2^{(2)}$ — произвольные функции. С учётом равенства (24) найдём разность $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{k}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha a' - a'^2 - \beta\delta}} \arcsin\left(y\sqrt{\frac{\alpha^2 + 2\alpha a' - a'^2 - \beta\delta}{I_1\beta^2}} \right) + f_3(I_1),$$

где f_3 — произвольная функция аргумента (25), $k = \pm(8a' + 2\alpha)$. Обозначив, как и ранее, $l = \frac{k}{\sqrt{\beta\delta + (a')^2 - 2\alpha a' - \alpha^2}}$, получим

$$e^{\varphi_1 - \varphi_2} = e^{l\arcsin\left(y\sqrt{\frac{\alpha^2 + 2\alpha a' - a'^2 - \beta\delta}{I_1\beta^2}} \right)} e^{f_3}.$$

Решение системы уравнений (10), (11) в рассматриваемом случае сводится к следующей системе:

$$\left[(\alpha + a')y + \beta z\right]f'_y + \left[-(\alpha + a')z + \delta y\right]f'_z +$$

$$+\beta e^{-l\arcsin\left(y\sqrt{\frac{\alpha^2+2\alpha a'-a'^2-\beta\delta}{I_1\beta^2}}\right)} e^{-f_3}Gf'_F + \delta e^{l\arcsin\left(y\sqrt{\frac{\alpha^2+2\alpha a'-a'^2-\beta\delta}{I_1\beta^2}}\right)} e^{f_3}Ff'_G = 0; \tag{32}$$

$$[(\alpha + a')y + \beta z]g'_y + [-(\alpha + a')z + \delta y]g'_z +$$

$$+\beta e^{-l\arcsin\left(y\sqrt{\frac{\alpha^2+2\alpha a'-a'^2-\beta\delta}{I_1\beta^2}}\right)} e^{-f_3}\widetilde{G}g'_{\widetilde{F}} + \delta e^{l\arcsin\left(y\sqrt{\frac{\alpha^2+2\alpha a'-a'^2-\beta\delta}{I_1\beta^2}}\right)} e^{f_3}\widetilde{F}g'_{\widetilde{G}} = 0. \tag{33}$$

Характеристическое уравнение для выражения (32) имеет вид

$$\frac{dy}{(a'+\alpha)y+\beta z} = \frac{dz}{-(a'+\alpha)z+\delta y} =$$

$$= \frac{d\widetilde{F}}{\beta e^{-l\arcsin\left(y\sqrt{\frac{\alpha^2+2\alpha a'-a'^2-\beta\delta}{I_1\beta^2}}\right)} e^{-f_3}\widetilde{G}} = \frac{d\widetilde{G}}{\delta e^{l\arcsin\left(y\sqrt{\frac{\alpha^2+2\alpha a'-a'^2-\beta\delta}{I_1\beta^2}}\right)} e^{f_3}\widetilde{F}}.$$

Рассмотрение этого характеристического уравнения приводит к системе двух ОДУ первого порядка с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{F}}{dy} = \dfrac{\beta e^{-B}e^{-f_3}\widetilde{G}}{A}, \\ \dfrac{d\widetilde{G}}{dy} = \dfrac{\delta e^{B}e^{f_3}\widetilde{F}}{A}, \end{cases} \tag{34}$$

где $A = \pm\dfrac{1}{\beta}\sqrt{I_1\beta^2 + y^2(\beta\delta - 7a'^2)}$ (то же, что и раньше),

$$B = l\arcsin\left(y\sqrt{\frac{\alpha^2+2\alpha a'-a'^2-\beta\delta}{I_1\beta^2}}\right).$$

Решение системы (34) сводится к решению ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2\widetilde{F}}{dy^2} = \frac{\beta\delta\widetilde{F}}{A} - \left(B' + \frac{A'}{A}\right)\frac{d\widetilde{F}}{dy},$$

или, подробно,

$$\left(I_1\beta^2 + y^2(\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2)\right)\frac{d^2\widetilde{F}}{dy^2} +$$

$$+\left(\beta(8a'+2\alpha) + y(\beta\delta + a'^2 - 2\alpha a' - \alpha^2)\right)\frac{d\widetilde{F}}{dy} - \beta^3\delta\widetilde{F} = 0.$$

Если $\beta \neq 0$, $2a' + \alpha + \gamma \neq 0$, то вместо ОДУ (15) мы получаем квадратное уравнение относительно неизвестной $z = z(y)$:

$$\frac{\beta-2a'-\alpha-\gamma}{2}\left(z^2+\frac{a'+\alpha}{\beta}zy\right)=$$

$$=C(x)+y^2\left(\frac{\beta\delta-(a'+\alpha)(a'+\gamma)}{2\beta}-\frac{(\beta-2a'-\alpha-\gamma)(a'+\alpha)^2}{2\beta^2}\right),$$

где $C(x)$ — произвольная функция. Отсюда находим $z=z(y)$:

$$z(y)=-\frac{a'+\alpha}{\beta}y\pm\frac{2\sqrt{D}}{\beta-2a'-\alpha-\gamma},$$

где

$$D=\frac{\beta-2a'-\alpha-\gamma}{2}\left(4C(x)+\frac{y^2}{2\beta^2}\left(4\beta(\beta\delta-(a'+\alpha)(a'+\gamma))-3(\beta-2a'-\alpha-\gamma)(a'+\alpha)^2\right)\right).$$

Таким образом, найденные симметрии позволяют понизить порядок исследуемых систем сразу на две единицы, причем одно из двух уравнений первого порядка получившейся системы оказывается независимым от другого. Поэтому если второе уравнение интегрируется (что и имеет место в ряде случаев), то исходная система сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зайцев В. Ф., Павлюков К. В.* Решение прямой и обратной задач группового анализа для систем уравнений второго порядка // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: Материалы Международной конференции «Герценовские чтения—2008». СПб.: Изд. БАН, 2008. С. 44–49.

2. *Салтыков Н. Н.* Исследование по теории уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции. Харьков, 1905.

REFERENCES

1. *Zajcev V. F., Pavljukov K. V.* Reshenie prjamoj i obratnoj zadach gruppovogo analiza dlja sistem uravnenij vtorogo porjadka // Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovanija: Materialy Mezhdunarodnoj konferencii «Gercenovskie chtenija—2008». SPb.: Izd. BAN, 2008. S. 44–49.

2. *Saltykov N. N.* Issledovanie po teorii uravnenij s chastnymi proizvodnymi pervogo porjadka odnoj neizvestnoj funkcii. Har'kov, 1905.