

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
ЧАСТЬ I. Классические методы поиска точных решений	7
Введение	8
0.1. Основные определения	8
0.2. Основные принципы	17
Глава 1. Уравнения первого порядка	21
1.1. Уравнение с разделяющимися переменными	21
1.2. Линейное уравнение	22
1.3. Уравнение Бернулли	25
1.4. Однородное уравнение и приводящиеся к нему	27
1.5. Уравнение Якоби	31
1.6. Уравнение Дарбу	36
1.7. Уравнение Риккати	41
1.8. Уравнение Риккати: канонические преобразования	43
1.9. Специальное уравнение Риккати	45
1.10. Уравнения Абеля 1-го и 2-го рода	48
1.11. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель	52
1.12. Уравнение Дарбу; интегрирующий множитель	55
1.13. Уравнение Дарбу: критические особые точки	56
1.14. Особые решения	60
1.15. Уравнения, не разрешённые относительно производной	62
1.16. Уравнения Лагранжа и Клеро	64
1.17. Особые точки	67
1.18. Понятие устойчивости	74
1.19. Задача программного управления	80
Глава 2. Уравнения старших порядков	83
2.1. Простейшие случаи понижения порядка	83
2.2. Интегрирующий множитель и первые интегралы	89
2.3. Уравнение Ермакова	93
2.4. Первые интегралы уравнений 3-го и 4-го порядков	95
2.5. Общие свойства линейных уравнений	103

2.6. Простейшие преобразования линейных уравнений	105
2.7. Неоднородные линейные уравнения. Метод Лагранжа	107
2.8. Уравнения с постоянными коэффициентами	109
2.9. Уравнение гармонических колебаний	113
2.10. Уравнения Эйлера	116
2.11. Задача Штурма–Лиувилля	118
2.12. Задача о “провисании” потенциала	122
Глава 3. Элементы аналитической теории дифференциальных уравнений	130
3.1. Обобщённый степенной ряд. Особые точки уравнения	130
3.2. Функции Бесселя	134
3.3. Функции Бесселя полуцелого индекса	136
3.4. Гипергеометрическое уравнение Гаусса	137
3.5. Ортогональные полиномы	138
3.6. Стационарное уравнение Шрёдингера	141
3.7. “Клон” гипергеометрических рядов	145
3.8. Понятие об иррегулярных особых точках на бесконечности	146
ЧАСТЬ II. Классический групповой анализ	149
Введение	150
Глава 1. Группы преобразований на плоскости	153
1.1. Основные определения	153
1.2. Многообразия	154
1.3. Группы Ли	155
1.4. Инварианты групп Ли. Инфинитезимальный оператор	159
1.5. Обобщение на многомерный случай	163
Глава 2. Уравнения первого порядка и допускаемые ими точечные группы	168
2.1. Предварительные замечания	168
2.2. Преобразования производных. Формулы продолжения	169
2.3. Уравнения первого порядка, допускающие группу	173
2.4. Канонический оператор	177
2.5. Уравнение Риккати. Группы эквивалентности	180
2.6. Существенные произвольные элементы. Специальное уравнение Риккати	184

2.7. Дифференциальные инварианты. Понижение порядка уравнения	187
Глава 3. Уравнения второго порядка и допускаемые ими точечные группы	191
3.1. Предварительные замечания	191
3.2. Условие инвариантности и определяющая система	192
3.3. Алгебры Ли	193
3.4. Групповой анализ уравнения $y'' = 0$. Теорема Ли	196
3.5. Групповой анализ обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера	197
3.6. Классическое уравнение Эмдена–Фаулера	202
Глава 4. Интегрирование уравнений, допускающих непрерывную группу	206
4.1. Предварительные замечания	206
4.2. Алгоритм понижения порядка. Двумерные алгебры Ли	211
4.3. Интегрирование уравнения $y'' = Ax^{-15/7}y^2$	214
4.4. Неалгоритмическое интегрирование с помощью нелокальных операторов	216
4.5. Замечания о трёхмерных алгебрах	219
4.6. Операторы касательных преобразований	222
4.7. Вариационные (нётеровы) симметрии	227
Глава 5. Уравнения в частных производных	234
5.1. Формулы продолжения	234
5.2. Уравнения 1-го порядка	237
5.3. Инвариантные решения	239
5.4. Понятие об оптимальной системе подалгебр	241
5.5. Уравнение теплопроводности	244
ЧАСТЬ III. Современный групповой анализ	249
Введение	250
Глава 1. Обратные задачи	255
1.1. Точечные группы, допускаемые уравнениями второго порядка	255
1.2. Многомерные точечные алгебры	259
1.3. Обратная задача в общем случае	264

1.4. Касательные преобразования	265
1.5. Уравнение $ay'y''' - b(y'')^2 = f(x, y, y')$	269
Глава 2. Экспоненциальные нелокальные операторы (ЭНО)	276
2.1. Формальные операторы	276
2.2. Теоремы о факторизации	279
2.3. Неклассические симметрии и уравнение Ермакова	286
2.4. Другие примеры применения ЭНО	289
Глава 3. Операторы Ли–Беклунда. Симметрии первых интегралов	292
3.1. Уравнение $y^{IV} = Ay^{-5/3}$	292
3.2. Уравнение $y^{IV} - \frac{5}{2}ay'' + \frac{9}{16}a^2y = By^{-5/3}$	295
3.3. Теоремы о симметриях первых интегралов	296
Глава 4. Аналоги нётеровых симметрий	300
4.1. Постановка задачи и группы эквивалентности	301
4.2. Обратная задача для уравнения $y''' = F(y)$	304
4.3. Обратная задача для уравнения $y''' = F(y, y')$	308
4.4. Обратная задача для уравнения $y''' = F(y, y'')$	311
4.5. Неэкспоненциальные нелокальные операторы. Тест на ННО	315
Глава 5. Факторизация функционально-дифференциальных уравнений	321
5.1. О методах поиска точных решений	321
5.2. Недоопределённые уравнения	325
5.3. Некоторые элементы техники. Примеры	331
5.4. Об уравнениях 2-го порядка	334
ЧАСТЬ IV. Дискретно-групповой анализ	343
Введение	344
Глава 1. Дискретные группы преобразований	345
1.1. Основные определения	345
1.2. Инварианты дискретных групп. Инвариантные множества дискретных групп	349
1.3. Разрешимые группы	355
1.4. Алгебраические уравнения	359

1.5. Функциональные уравнения	363
1.6. Функционально-дифференциальные уравнения	366
Глава 2. Дискретные группы преобразований ОДУ	369
2.1. Дискретная группа Лиувилля специального уравнения Риккати	369
2.2. Дискретные метаклассы преобразований	373
2.3. Сингулярные точки ДМП. Инварианты ДМП	378
2.4. Распирения ДМП	381
Глава 3. Дискретные метаклассы преобразований обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера	387
3.1. Точечные группы. Прямой метод	387
3.2. Преобразования Беклунда. RF-пары	391
3.3. Обобщённое уравнение Эмдена–Фаулера. Точечные преобразования	396
3.4. Обобщённое уравнение Эмдена–Фаулера. Преобразования Беклунда	400
3.5. Метод опорного уравнения	405
3.6. Обобщённое уравнение Эмдена–Фаулера. Сингулярные точки. Метод вложения	412
3.7. Обобщённое уравнение Эмдена–Фаулера. Распирения ДГП	419
Глава 4. Применение ДГП для интегрирования уравнений. Дополнение	427
4.1. “Размножение” интегрируемых уравнений	427
4.2. Редукция дискретно-инвариантных уравнений	432
4.3. Дополнение 1. Уравнения первого порядка	440
4.4. Дополнение 2. Парагруппа третьего порядка	448
4.5. Дополнение 3. К интегрированию биномиального дифференциала	449
4.6. Заключение	451
Приложение	453
Ответы и комментарии	458
Список литературы	486