

## ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

*Проведено сравнение положительных и отрицательных сторон широко применяемого для нахождения весовых коэффициентов влияющих факторов метода анализа иерархий. Проведенные исследования и многолетний опыт авторов применения данного метода на практике дают основание предполагать наличие ряда достоинств метода, таких как большая достоверность по сравнению с другими подходами и технологичность реализации. В то же время критерий оценки качества работы эксперта нуждается в совершенствовании.*

**Ключевые слова:** экспертный опрос, влияющие факторы, метод анализа иерархий, критерий оценки, качество опроса.

*A. Tutygin, V. Korobov*

### ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF THE ANALYTIC HIERARCHY PROCESS

*The comparison of positive and negative aspects of widely used Analytic Hierarchy Process (AHP) for influencing factors of weight coefficients is presented in this issue. Authors' research and experience in the application of AHP prove some advantages of it, such as: high authenticity in comparison with other approaches and technology of its realization. At the some time the rule of estimating of experts' activities needs improving.*

**Keywords:** poll, methods of hierarchy analysis, evaluation criteria, poll quality.

При проведении исследований экономических, социальных, природных и техногенных систем для учета всех обстоятельств их функционирования как единого объекта приходится рассматривать большое количество влияющих факторов. При этом далеко не все связи между компонентами систем могут быть количественно учтены из-за отсутствия необходимого объема информации, а для определенных классов задач, таких как прогностические и имитационные, данных может не быть совсем. В этих случаях требуемые связи обычно устанавливаются экспертным путем [3]. Для удобства их представляют в виде весовых коэффициентов, назначение которых — числовая оценка вклада соответствующего фактора в конечный результат.

**Расчет весовых коэффициентов.** Для расчета весовых коэффициентов используются разные подходы, в рамках которых разработано множество различных методов. Поскольку в наши задачи не входит подробное рассмотрение существующих методов нахождения весовых коэффициентов, ограничимся рассмотрением только основных подходов.

**Прямая расстановка.** Эксперты расставляют веса факторам, исходя из некоторого требования, например, чтобы сумма всех весов была равна единице либо 100%, хотя может быть выбрана и любая другая константа, если это окажется более удобным для дальнейших расчетов. Иногда эту процедуру путают с присвоением факторам определенных значений по какой-либо числовой шкале, но тогда правильнее будет называть эти коэффициенты коэффициентами значимости, а не весовыми, поскольку в этом случае получают сравнительную оценку факторов, а не их вклад в конечный результат. Тем не менее, этим методом также можно получить весовые коэффициенты, на чем мы остановимся ниже.

Трудности этого подхода заключаются в необходимости в неявном виде держать в поле зрения одновременно все факторы, поскольку, присваивая определенное числовое значение конкретному фактору, эксперт должен одновременно его сопоставить со всеми остальными. Сложности возрастают в геометрической прогрессии по мере увеличения числа факторов.

Есть еще и техническое затруднение в работе эксперта, связанное с необходимостью постоянно контролировать текущую сумму весовых коэффициентов, чтобы не оказаться перед фактом превышения заданной константы или оставить на последние факторы слишком большую часть. Если это происходит, то приходится переопределять уже присвоенные коэффициенты, что может происходить несколько раз, пока этот своеобразный итерационный процесс не закончится. Число итераций увеличивается по мере роста количества факторов.

**Ранжирование факторов.** Этот подход несколько облегчает экспертам работу, поскольку не требует контроля общей суммы коэффициентов. Здесь от экспертов требуется провести ранжирование, т. е. упорядочить обследуемые факторы, формирующие объект, по степени проявления их свойств в порядке их возрастания или убывания:

$$\left. \begin{array}{l} R_{11}, R_{21}, \dots, R_{n1}; \\ R_{12}, R_{22}, \dots, R_{n2}; \\ \dots\dots\dots; \\ R_{1m}, R_{2m}, \dots, R_{nm}, \end{array} \right\} \quad (1)$$

где  $R_{ij}$  — ранг (место), присвоенный фактору  $O_i$   $j$ -м экспертом в ряду из  $n$  обследованных объектов, упорядоченных этим экспертом по степени проявления анализируемого свойства. Допускается двум и более факторам присваивать одинаковый ранг, но тогда он будет дробным. Сводные оценки весовых коэффициентов можно получить в результате усреднения частных рангов по столбцам.

Преимущество этого метода заключается в его простоте, но это не тот случай, когда простота эффективна, поскольку усреднение рангов ведет к более

грубым оценкам весовых коэффициентов по сравнению с другими методами. Кроме того, он также не избавляет эксперта от необходимости держать в поле зрения все факторы, как и при прямой расстановке.

**Присвоение коэффициентов факторам.** В этом методе экспертам предлагается оценивать факторы по некоторой балльной шкале, например от 1 до 10. Тогда получаем выражения

$$\left. \begin{array}{l} y_{11}, y_{12}, \dots, y_{n1}; \\ y_{12}, y_{22}, \dots, y_{n2}; \\ \dots\dots\dots; \\ y_{1m}, y_{2m}, \dots, y_{nm}, \end{array} \right\} \quad (2)$$

где  $y_{ij}$  — балльная оценка фактора, полученная от  $j$ -го эксперта,  $n$  — количество факторов,  $m$  — число экспертов.

Сводные оценки весовых коэффициентов обычно находят путем подбора соответствующей регрессионной модели. Среднюю оценку  $w_i$  весовых коэффициентов факторов можно получить по простым формулам [4]

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^m w_{ij}}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n w_{ij}}, \quad (3)$$

где  $w_{ij}$  — вес  $i$ -го объекта, рассчитанный по оценкам всех экспертов;

$$w_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^n x_{ij}}, \quad (4)$$

где  $x_{ij}$  — оценка фактора  $i$ , данная экспертом  $j$ ;  $n$  — число факторов,  $m$  — число экспертов.

Этот метод в определенной степени делает более слабой зависимость оценки конкретного фактора от остальных, но окончательно не избавляет от нее, поскольку сопоставлять факторы все же требуется – иначе коэффициенты значимости корректно невозможно расставить.

**Сущность метода анализа иерархий.** Частично избавиться от указанных выше сложностей призван метод анализа иерархий (МАИ), разработанный Т. Саати [5] в 80-х годах прошлого века. Суть метода заключается в следующем. Факторы сравниваются между собой по парам относительно друг друга по их влиянию на конечную цель. При этом влияние других факторов не учитывается. Для попарного сравнения факторов автором метода Саати предложена специальная оценочная шкала, состоящая из пяти основных и четырех промежуточных суждений. В ней суждения экспертов представляются следующим образом (табл. 1):

Таблица 1

Иерархия экспертных сравнений соотношения факторов

Суждение	Пояснение
1. Равная важность	Равный вклад факторов в цель
2. ...	Промежуточное суждение
3. Умеренное превосходство	Опыт и суждение дают легкое превосходство одного фактора над другим
4. ...	Промежуточное суждение
5. Существенное превосходство	Сильное превосходство одного фактора над другим
6. ...	Промежуточное суждение
7. Значительное превосходство	Имеется практически значительное превосходство одного фактора над другим
8. ...	Промежуточное суждение
9. Очень сильное превосходство	Имеется значительное превосходство одного фактора над другим

В итоге результаты парных сравнений представляются в виде квадратной матрицы  $A = (a_{ij})$  с единичной диагональю (сравнение фактора самого с собой равно единице). Здесь  $a_{ij}$  означает отношение оценок соответствующих элементов; индексы  $i$  и  $j$  изменяются от единицы до величины, равной количеству факторов. Поскольку при последовательном переборе всех возможных пар факторы сравниваются между собой дважды (сначала — фактор  $a_i$  с фактором  $a_j$ , затем — в обратном порядке), при составлении матрицы должно выполняться условие «обратной симметричности»:  $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ . Из этого следует, что достаточно за-

полнять только одну часть матрицы — лежащую выше или ниже диагонали, что не имеет принципиального значения вследствие элементарного пересчета взаимно обратных значений. Если рассматривается  $n$  факторов, то всего возможно наличие  $\frac{n^2 - n}{2}$  значащих сочетаний.

В МАИ для кодирования используется номер соответствующей строки табл. 1. Каждое из приведенных суждений кодируется числом от 1/9 до 9. Например, если придано существенное превосходство элемента  $A_i$  (например, загрязнения водных объектов) над элементом  $A_j$  (например, загрязнение атмосферного воздуха), то полагают, что в матрице парных сравнений  $a_{ij} = 5$  и соответственно  $a_{ji} = 1/5$ , поскольку для кодирования используется пятая строка.

Суть обработки матрицы заключается в разложении:  $A \approx Z \cdot U$ , где  $U = \left( \frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_n} \right)$ . Цель — определение компонент вектора весов  $Z = (z_1, \dots, z_n)$ ,

что позволяет ранжировать факторы  $A_i$ .

Вычисление весов можно осуществить несколькими способами. Одним из возможных подходов к аппроксимации вектора весов может служить путь вычисления собственного вектора матрицы парных сравнений, который равен соответствующему максимальному собственному числу. Соответствующие алгоритмы нахождения собственного вектора достаточно подробно разработаны, и описание их можно найти в монографиях [1; 2] и в другой литературе.

Процедура МАИ располагает встроенным критерием качества работы эксперта — индексом согласованности (ИС), который дает информацию о степени нарушения численной (кардинальной) и транзитивной (порядковой) согласованности экспертных суждений. Проверка на кардинальность заключается в контроле за определенными числовыми характеристиками, отклонение от которых свидетельствует о наличии ошибок при формализации экспертных суждений. Другими словами, если приняты некоторые правила кодировки экспертных суждений, например, от нуля до единицы, то экспертные суждения не должны выходить за рамки установленных этими правилами множества значений, т. е. быть отрицательными или больше единицы. Транзитивность позволяет проверить логику мышления эксперта. Если эксперт полагает, что фактор А превосходит фактор Б, а фактор Б, в свою очередь, превосходит фактор В, то при парном сравнении фактор В не должен превосходить фактора А, т. е. должно выполняться неравенство  $A > B > V$ . Отсутствие согласованности может быть серьезным ограничивающим фактором для исследования некоторых проблем.

ИС вычисляется следующим образом. Вместе с матрицей парных сравнений можно получить меру оценки степени отклонения от согласованности. ИС в каждой матрице и для всей иерархии можно приближенно оценить, используя формулу

$$ИС = \frac{\lambda - n}{n - 1}, \quad (5)$$

где  $\lambda$  — собственное число,  $n$  — число сравниваемых факторов. ИС сравнивается с величиной, полученной при случайном выборе количественных величин, которая трактуется как средняя. Средние согласованности (СС) для случайных матриц разного порядка приведены в табл. 2, где  $n$  — число факторов.

Таблица 2

Средние согласованности (СС) для случайных матриц разного порядка

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
СС	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Если разделить ИС на СС для матрицы того же порядка, то получим отношение согласованности (ОС)

$$ОС = \frac{ИС}{СС} \cdot 100\%. \quad (6)$$

Качество эксперта оценивается по величине ОС. Чтобы быть приемлемой, величина ОС рекомендуется порядка 10% или менее. В некоторых случаях, когда рассматривается сложная и зависящая от большого количества факторов система, можно установить верхнюю границу, равную 20%, но не более. Если ОС выходит за эти пределы, то результаты работы таких экспертов рекомендуется исключить из рассмотрения.

**Положительные стороны.** На первый взгляд, кажется, что МАИ представляет собой идеальный инструментарий для решения широкого круга мно-

гофакторных задач, в которых экспертные методы используются как ключевые. Это во многом действительно так, и мы укажем на основные причины этого.

**Попарность сравнений.** Сравнение предметов по парам заложено в самой человеческой природе [6]. Отсутствие необходимости постоянно держать в поле зрения все факторы или, по крайней мере, группу однородных факторов, позволяет эксперту сконцентрировать внимание на конкретной проблеме: насколько фактор  $A_i$  превосходит фактор  $B_j$  или уступает ему. Вследствие этого следует ожидать более точных результатов.

**Дополнительность исходной матрицы.** В практике исследований систем нередко возникают ситуации, когда число влияющих факторов изменяется. Это происходит как вследствие цикличности природных процессов, так и вследствие изменения социально-экономических условий. Тогда приходится добавлять, уменьшать или заменять одни факторы другими. При использовании МАИ это приводит только к необходимости сравнения вновь возникших пар или же к вычеркиванию строк и столбцов матрицы парных сравнений, соответствующих изъятым из рассмотрения факторам, т. е. к образованию минора матрицы. Полученные результаты предыдущих опросов сохраняются, и полного обновления анкеты, как это происходит в других случаях, не требуется. С учетом того, что процедура МАИ, в сущности, сводится к поиску собственного вектора соответствующей матрицы, принадлежащего максимальному собственному значению, с «технической» точки зрения включение дополнительных факторов есть увеличение размерности соответствующего линейного пространства за счет добавления прямых слагаемых.

**Наличие вербально-числовой шкалы.** Обычные числовые шкалы не всегда удобны для сопоставления факторов, выражаемых в различных размерностях и понятиях. Особенно сложно сравнивать факторы, показателями которых, с одной стороны, являются количественные величины, а с другой – качественные. Так, наиболее часто используемая шкала Харрингтона «принимает на входе» только относительные количественные характеристики, распределенные в интервале от 0 до 1. Вербально-числовые шкалы, одним из вариантов которых является шкала Саати, как раз и призваны оценивать такие несоответствия показателей влияющих факторов.

**Встроенный критерий качества работы эксперта.** По результатам опроса эксперты, как правило, подлежат проверке. Для этого обычно применяются различные числовые индексы, разработанные как для групповых, так и для индивидуальных опросов. При этом вопрос об оптимальном критерии является открытым, а его выбор произволен. В этом смысле наличие в МАИ такой характеристики (параметра), как отношение согласованности, очень удобно, особенно при создании автоматизированного программно-аппаратного комплекса.

**Недостатки метода.** Однако не все преимущества МАИ так очевидны. Возникает ряд вопросов при интерпретации результатов, и связаны они, прежде всего, с критерием качества работы эксперта — с отношением согласованности.

**Использование транзитивности для качественных показателей.** Отношение транзитивности хорошо работает, когда все характеристики исследуемой системы можно представить числовыми величинами. Но как только это становится невозможным, требование наличия транзитивности зачастую вступает в противоречие с логикой исследователя. Проиллюстрируем сказанное на

часто встречающемся в той или иной интерпретации примере из теории группового выбора. Пусть эксперту поставлена задача оценить привлекательность трех городов – Москвы, Новгорода и Пскова с точки зрения развития туристического бизнеса. Допустим, эксперт отдал предпочтение Москве перед Новгородом, а Новгороду — перед Псковом. Из правила транзитивности следует предпочтение Москвы перед Псковом, но эксперт, руководствуясь определенными соображениями, например, такими, как близость к границам зарубежных государств, может отдать предпочтение Пскову перед Москвой, и этот аргумент не так просто опровергнуть.

**«Обратная» логика.** Критерии качества работы эксперта в большинстве своем — и отношение согласованности тоже — основываются на отклонении от некоей статистической характеристики, например, математического ожидания. Как и все критерии, имеющие в основе статистический характер, отношение согласованности является формальным и в некоторых случаях приводит к трудно интерпретируемым результатам.

Авторам неоднократно приходилось сталкиваться с такой проблемой. Анализируя результаты опросов экспертов, которые попадали в пределы заданного уровня качества ( $OC < 10-20\%$ ), мы практически всегда обнаруживали несколько случаев, когда весовые коэффициенты резко отличались от большинства, а то и носили прямо противоположный характер: те факторы, которым большинство придавали наибольшую значимость, эти эксперты оценивали как менее значимые и — наоборот. При усреднении результатов всех экспертов, соответствующих заданному критерию, что обычно делают для получения обобщенных оценок, это приводит к смещению средних значений весовых коэффициентов.

**Что такое «идеальный эксперт»?** Отношение согласованности – формула (6) — основано на сравнении результатов данного эксперта с неким идеальным экспертом — табл. 2. Однако что такое идеальный эксперт в МАИ, не совсем понятно. Рассмотрим идеализированную ситуацию, когда эксперт составляет оценки, строго соблюдая транзитивность своих предпочтений относительно нумерации факторов, т. е.  $a_{ij} > a_{i+1, j+1}$  (или, наоборот,  $a_{ij} < a_{i+1, j+1}$ ) — табл. 3.

Таблица 3

Матрица парных сравнений для восьми факторов

Факторы	Факторы								
	n	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	8	8	8	8	8	8	8	8
2	1/8	1	7	7	7	7	7	7	7
3	1/8	1/7	1	6	6	6	6	6	6
4	1/8	1/7	1/6	1	5	5	5	5	5
5	1/8	1/7	1/6	1/5	1	4	4	4	4
6	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1	3	3	3
7	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1	2	2
8	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1	1

Казалось бы, что обработка такой матрицы должна дать очень низкое значение отношения согласованности, близкое нулю. Однако оно равно 23,3%! Для  $n = 9$  при построении такого же типа матрицы ОС составит уже 27,8%, а возрас-

## Преимущества и недостатки метода анализа иерархий

---

тание ОС будет все большим по мере увеличения числа факторов, что заставляет задуматься о качестве данного критерия.

**В ы в о д ы .** Метод анализа иерархий представляет собой достаточно качественную процедуру для нахождения весовых коэффициентов влияющих факторов при анализе систем. Однако входящий в его состав критерий отбора экспертов, по меньшей мере, нуждается в подключении дополнительных процедур с соответствующими алгоритмами, требующими специального изучения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 583 с.
2. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
3. *Коробов В. Б.* Экспертные методы в географии и геоэкологии. Архангельск: Изд-во Поморского университета, 2008. 235 с.
4. *Лопатин В. Н.* Менеджмент и маркетинг в экологии и природопользовании. М.: НИИ – Природа, 2001. 253 с.
5. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. М.: Радио и связь, 1991. 224 с.
6. *Сеченов И. М.* Элементы мысли. СПб.: Питер, 2001. 404 с.

### REFERENCES

1. *Bazara M., Shetti K.* Nelinejnoe programmirovaniye. Teorija i algoritmy. M.: Mir, 1982. 583 s.
2. *Golub Dzh., Van Loun Ch.* Matrichnyye vychisleniya. M.: Mir, 1999. 548 s.
3. *Korobov V. B.* Ekspertnyye metody v geografii i geoekologii. Arhangel'sk: Izd-vo Pomorskogo universiteta, 2008. 235 s.
4. *Lopatin V. N.* Menedzhment i marketing v ekologii i prirodopol'zovanii. M.: NIA – Priroda, 2001. 253 s.
5. *Saati T., Kerns K.* Analiticheskoye planirovaniye. M.: Radio i svjaz', 1991. 224 s.
6. *Sechenov I. M.* Elementy mysli. SPb.: Piter, 2001. 404 s.